Олимпиада по физике имени проф. И.В. Савельева

Приведён вариант заданий олимпиады по физике имени профессора И.В. Савельева (автора известного учебника по курсу общей физики для студентов технических вузов) для 7–11-го классов (с решениями), которая состоялась 18 ноября 2012 г. в Национальном исследовательском ядерном университете МИФИ. Эта олимпиада является отборочным туром Отраслевой физико-математической олимпиады школьников «Росатом» для школьников 7–11-х классов.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: олимпиада, «Росатом», 11 класс, абитуриенту

С.Е. МУРАВЬЁВ
semuraviev@mail.ru,
НИЯУ МИФИ, г. Москва

7-й класс

1. Высота гранитной колонны «Александрийский столп» в Санкт-Петербурге 25,6 м. Каково давление колонны на постамент? Плотность гранита 2600 кг/м^3, ускорение силы тяжести g = 10 м/с^2. Считать, что колонна цилиндрическая.

(*Ответ.* $p = \rho g h = 6{,}7 \cdot 10^5$ Па.)

2. Имеются чугунный шар и шар из неизвестного лёгкого сплава. Масса чугунного шара в 1,25 раза больше массы шара из неизвестного сплава. Объём чугунного шара в 2 раза меньше объёма второго шара. Какова плотность шара из неизвестного сплава? Плотность чугуна 7,0 г/см^3.

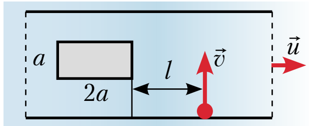
(*Ответ.* $\rho = \rho_{ч} \cdot \dfrac{V_1}{V_2} \cdot \dfrac{M_2}{M_1} = 2{,}8$ г/см^3, может быть дюралюминий.)

3. Эскалатор длиной l = 120 м движется вверх со скоростью v = 90 см/с. Расстояние между соседними ступенями Δl = 50 см. На каждой ступени, кроме одной, стоит человек. Через интервал времени Δt = 1 с после того, как перед человеком оказывается свободная ступень, он делает шаг вперёд и переступает на неё. За какое время свободная ступень достигнет верхнего уровня эскалатора, если в начальный момент она находилась посередине эскалатора? Снизу на каждую появившуюся ступень эскалатора встаёт новый человек.

Решение. Пусть искомое время перемещения свободной ступени равно t. За это время ступень, которая была свободна в начальный момент, переместилась на расстояние vt. При этом $t/\Delta t$ человек сделали шаг на свободную ступень, которая, следовательно, переместилась от той ступени, которая была свободной вначале, на расстояние $\Delta l \cdot t/\Delta t$. Поэтому перемещение свободной ступени есть $vt - \Delta l t/\Delta t$ и равно половине длины эскалатора.

Поэтому $t = \dfrac{l/2}{v - (\Delta l/\Delta t)} = 150$ с.

4. Лента горизонтального транспортёра шириной l движется со скоростью u. Посередине ленты вырезано прямоугольное отверстие размерами $a \times 2a$. В некоторый момент мальчик запускает по ленте перпендикулярно её боковому краю льдинку, которая из-за отсутствия трения движется перпендикулярно ленте. В этот момент передний край отверстия находится на расстоянии l от перпендикуляра, вдоль которого запущена льдинка. Какие значения может принимать скорость льдинки v, чтобы она пересекла ленту транспортёра?



Решение. Льдинка будет находиться на расстоянии от $(l - a)/2$ до $(l + a)/2$ от края транспортёра (то есть там, где может быть отверстие) в течение времени

$$\frac{l-a}{2v} \le t \le \frac{l+a}{2v}. \qquad (1)$$

Отверстие будет пересекать путь льдинки в течение времени

$$\frac{l}{u} \le t \le \frac{l+2a}{u}. \qquad (2)$$

Чтобы льдинка не попала в отверстие, нужно, чтобы неравенства (1) и (2) не имели общих решений. Для этого должно быть выполнено условие:

$$\frac{l}{u} \ge \frac{l+a}{2v} \text{ либо } \frac{l+2a}{u} \le \frac{l-a}{2v}.$$

Отсюда получаем, что скорость льдинки:

$$v \le \frac{(l-a)u}{2(l+2a)} \text{ либо } v \ge \frac{(l+a)u}{2l}.$$

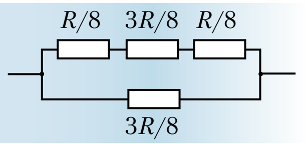
8-й класс

1. Победитель автогонок, пройдя 50 кругов, обогнал второго призёра на 2 круга. Какова средняя скорость движения второго автомобиля, если средняя скорость первого 100 км/ч?

Решение. Пусть длина круга s, а полное время движения первого автомобиля t. Тогда для средней скорости первого автомобиля имеет место соотношение $100 = \frac{50s}{t}$ (км · ч). Для второго автомобиля имеем $v = \frac{48s}{t}$ (км / ч). Поделив эти соотношения друг на друга, находим $v = \frac{48}{50} \cdot 100$ км/ч $= 96$ км/ч.

2. Провод, имеющий сопротивление R, сгибают в виде прямоугольника с отношением сторон 3 : 1. Найдите сопротивление провода, если в электрическую цепь он включается за две соседние вершины, между которыми находится длинная сторона прямоугольника.

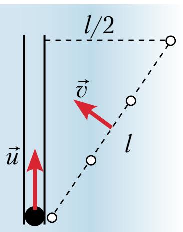
Решение. Очевидно, сопротивление каждой длинной стороны равно $3R/8$, короткой $R/8$. Эквивалентная схема включения прямоугольника в цепь показана на рисунке. Сопротивление верхнего участка равно $5R/8$. Полное сопротивление цепи r находим из формулы



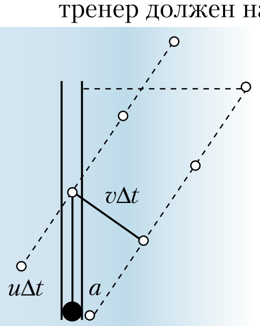
$$\frac{1}{r} = \frac{8}{3R} + \frac{8}{5R} = \frac{64}{15R} \Rightarrow r = \frac{15R}{64}.$$

3. См. задачу 3 из заданий для 7-го класса.

4. Спортсмены (обозначены маленькими прозрачными кружками на рисунке) бегут по полю шеренгой в направлении, перпендикулярном шеренге, со скоростью v (по модулю). Ширина шеренги l. По дорожке бежит тренер (чёрный кружок на рисунке). В начальный момент левый крайний спортсмен, поравнявшись с тренером, пересекает дорожку, а правый крайний находится от неё на расстоянии $l/2$. С какой скоростью u (по модулю) должен бежать по дорожке тренер, чтобы коснуться рукой каждого спортсмена?



Решение. Чтобы коснуться каждого спортсмена, тренер должен находиться в той точке, где шеренга спортсменов пересекает дорожку. За время Δt шеренга пройдёт расстояние $v\Delta t$, тренер – расстояние $u\Delta t$. Пусть угол между шеренгой и дорожкой равен α. Чтобы шеренга пересекала дорожку в той же точке, где находится тренер, перемещения тренера и шеренги должны быть соответственно гипотенузой и катетом прямоугольного треугольника с углом α (см. рисунок). Поэтому



$$\frac{v\Delta t}{u\Delta t} = \sin\alpha \Rightarrow u = \frac{v}{\sin\alpha}.$$

Но $\sin\alpha = 1/2$, поэтому $u = 2v$.

5. В сосуд с очень горячей водой опустили работающий нагреватель. В результате за время t температура воды повысилась на $\Delta T = 1$ °C. Если мощность нагревателя увеличить вдвое, за время t вода нагреется на $2{,}1 \cdot \Delta T$. На сколько нагреется вода в сосуде за время t, если мощность нагревателя увеличить втрое по сравнению с первоначальной?

Решение. Очевидно, в описанном в задаче процессе существуют потери тепла (иначе возрастание температуры за одно и то же время было бы пропорционально возрастанию мощности нагревателя). Поскольку вода в сосуде горячая, а поток тепла между телами с разными температурами определяется разностью температур, то можно ожидать, что при изменении температуры воды на 1 °C разность температур воды и окружающей среды изменяется не сильно, и мощность теплопотерь (количество теплоты, отдаваемое за 1 с) постоянна.

Пусть мощность нагревателя P, мощность теплопотерь w. Тогда уравнения теплового баланса для первого и второго случая имеют вид:

$$\begin{cases} c\Delta T = Pt - wt, \\ c \cdot 2{,}1\Delta T = 2Pt - wt, \end{cases} \qquad (3)$$

где c – теплоёмкость воды в сосуде. Из системы уравнений (3) получим:

$$\frac{Pt}{c} = 1{,}1 \cdot \Delta T, \quad \frac{wt}{c} = 0{,}1 \cdot \Delta T. \qquad (4)$$

Подставляя теперь мощность нагревателя и теплопотерь (4) в уравнение теплового баланса для случая, когда мощность нагревателя увеличили втрое: $c \cdot \Delta T_1 = 3Pt - wt$, найдём $\Delta T_3 = 3{,}2\Delta T$.

9-й класс

1. См. задачу 2 из заданий для 8-го класса.

2. См. задачу 4 заданий для 8-го класса.

3. Вес тела в лифте, движущемся с некоторым ускорением, направленным вверх, равен по модулю P, а в лифте, движущемся с тем же ускорением, направленным вниз, $P/2$. Определите массу тела.

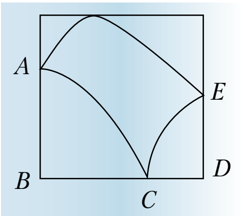
Решение. По второму закону Ньютона, уравнения движения для тела в лифте, движущемся с ускорением $\vec{a}$, направленным вверх, и для тела с таким же по модулю ускорением, направленным вниз, запишутся соответственно так:

$$\begin{cases} ma = P - mg, \\ ma = mg - P/2. \end{cases}$$

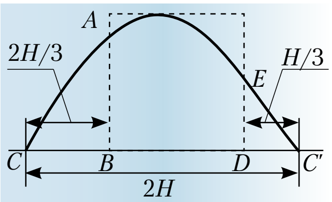
Вычитая второе уравнение из первого, получаем:

$$m = \frac{3P}{4g}.$$

4. Внутри полого куба со стороной H, касаясь его верхней грани, скачет шарик. Все удары шарика о стенки абсолютно упругие. Найдите длину отрезка AB, если известно, что отрезок $CD = H/3$.



Решение. Поскольку столкновения тела со стенками упругие, из данного в условии рисунка заключаем, что если бы не было стенок, а тело было бы брошено с той же начальной скоростью под тем же углом к горизонту, то высота подъёма тела равнялась бы H, а дальность полёта $2H$ (см. рисунок).



Кроме того, поскольку $CB = 2H/3$, то на движение от точки C до точки A тело затрачивает третью часть полного времени движения от точки бросания до точки падения. Поэтому

$$H = v_0 \sin\alpha\left(\frac{1}{2}t\right) - \frac{g}{2}\left(\frac{1}{2}t\right)^2;$$

$$AB = v_0 \sin\alpha\left(\frac{1}{3}t\right) - \frac{g}{2}\left(\frac{1}{3}t\right)^2,$$

где v_0 – начальная скорость тела, α – угол, под которым тело брошено к горизонту, t – полное время движения. Используя далее известную формулу для времени движения тела, брошенного под углом к горизонту $t = \dfrac{2v_0 \sin\alpha}{g}$, получим:

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}; \quad AB = \frac{4v_0^2 \sin^2\alpha}{9g}.$$

Отсюда находим $AB = \dfrac{8}{9}H$.

5. См. задачу 5 из заданий для 8-го класса.

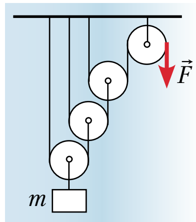
10-й класс

1. См. задачу 3 из заданий для 9-го класса.

2. См. задачу 4 из заданий для 8-го класса.

3. См. задачу 4 из заданий для 9-го класса.

4. В системе из трёх подвижных и одного неподвижного блоков (см. рисунок) груз перемещается вверх с постоянной скоростью $\vec{v}$. Какую мощность развивает при этом сила $\vec{F}$, действующая на конец верёвки?



Решение. Из условия равенства нулю ускорения груза находим: $F = \dfrac{mg}{8}$.

Из кинематических условий связи скоростей различных нитей имеем для скорости конца нити $v_1 = 8v$. Отсюда находим мощность, развиваемую силой $\vec{F}$: $N = Fv_1 = mgv$. Вся работа нашей силы идёт на подъём груза массой m с постоянной скоростью $\vec{v}$.

5. См. задачу 5 из заданий для 8-го класса.

11-й класс

1. Тело бросают вертикально вверх с поверхности Земли с начальной скоростью $v_0 = 20$ м/с. Какой путь пройдёт тело за время $t = 3$ с, если ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2?

Решение. Тело поднимется до верхней точки своей траектории за время $t = v_0/g = 2$ с. Поэтому пройденный за $t = 3$ с путь складывается из подъёма до верхней точки в течение двух секунд и спуска в течение одной секунды.

Максимальная высота подъёма тела определяется соотношением: $h = \dfrac{v_0^2}{2g} = 20$ м. Расстояние от верхней точки, на которое тело спустилось за $t = 1$ с найдём из закона движения: $\Delta s = \dfrac{gt^2}{2} = 5$ м.

Отсюда находим путь, пройденный за $t = 3$ с:

$$s = h + \Delta s = 25 \text{ м}.$$

2. Четыре конденсатора с ёмкостями C, $2C$, $3C$ и $4C$, рассчитанные на максимальные напряжения $2U$, $3U$, $4U$ и U соответственно, соединены последовательно. К какому максимальному напряжению можно подключить эту батарею конденсаторов?

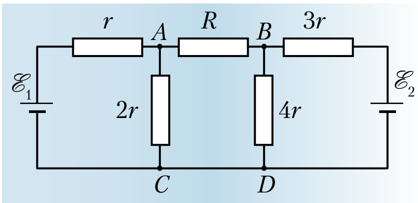
Решение. При последовательном соединении заряд на каждом конденсаторе один и тот же, а суммарное электрическое напряжение равно напряжению на батарее U_0. Используя далее определение ёмкости $C = q/U$ (U – напряжение, q – заряд), находим, что напряжения на конденсаторах ёмкостями C, $2C$, $3C$ и $4C$ относятся как обратные ёмкости: $U_1 : U_2 : U_3 : U_4 = 12 : 6 : 4 : 3$. Отсюда находим напряжения на конденсаторах:

$$U_1 = \frac{12U_0}{25}, \quad U_2 = \frac{6U_0}{25}, \quad U_3 = \frac{4U_0}{25}, \quad U_4 = \frac{3U_0}{25}.$$

Сравнивая эти напряжения с предельными значениями напряжений на конденсаторах, заключаем, что при увеличении приложенного к батарее конденсаторов напряжения U_0 произойдёт пробой первого конденсатора (ёмкость C). Это произойдёт, когда напряжение на батарее достигнет $U_0 = \dfrac{50U}{12}$.

Это и есть предельное напряжение на батарее.

3. Каким должно быть соотношение ЭДС источников ($\mathscr{E}_1/\mathscr{E}_2$) в схеме, изображённой на рисунке, чтобы через резистор сопротивлением R не тёк электрический ток? Значения сопротивлений остальных резисторов приведены на рисунке.

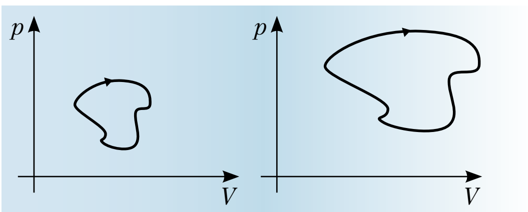


Решение. Если ток не течёт через резистор R, то он не течёт и по участку цепи, связывающему нижние клеммы сопротивлений $2r$ и $4r$ – точки A и B (в противном случае в левой или правой части схемы будет скапливаться электрический заряд). Поэтому левая и правая части цепи независимы, но потенциалы точек A и B, как и точек C и D одинаковы. Находим, по закону Ома для замкнутой цепи, токи в левой и правой частях цепи, затем находим, по закону Ома для участка цепи разности потенциалов на участках $2r$ и $4r$, приравниваем эти разности и получаем:

$$\frac{\mathscr{E}_1 \cdot 2r}{r+2r} = \frac{\mathscr{E}_2 \cdot 4r}{3r+4r} \Rightarrow \frac{\mathscr{E}_1}{\mathscr{E}_2} = \frac{6}{7}.$$

4. С идеальным газом происходит процесс, график которого в координатах p, V приведён на левом рисунке. КПД процесса равен η.

Чему равен КПД процесса (правый рисунок), проходящего через последовательность состояний, в каждом из которых давление в 2 раза, а объём в 3 раза больше соответственно давления и объёма газа в первом процессе? Ответ обоснуйте.



Решение. По определению, КПД цикла есть отношение работы, совершённой газом за цикл, к количеству теплоты, полученному от нагревателя в течение цикла. Работа газа численно равна площади цикла. Очевидно, эта площадь увеличилась в 6 раз – в 3 раза увеличились «горизонтальные» размеры цикла, в 2 раза – «вертикальные». Для нахождения количества теплоты, полученного от нагревателя, мысленно разобьём весь процесс на сумму процессов с бесконечно малым изменением объёма (элементарные процессы), найдём количество теплоты, полученное газом на каждом, и просуммируем полученные количества.

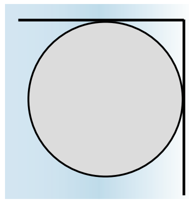
Поскольку «горизонтальные» размеры второго цикла в 3 раза больше «горизонтальных» размеров первого, второй процесс можно представить как совокупность процессов, в каждом из которых объём меняется на величину, в три раза бóльшую, чем в соответствующем процессе в первом цикле. Количество теплоты, полученное газом в каждом элементарном процессе δQ, можно найти, применяя к этому процессу первый закон термодинамики:

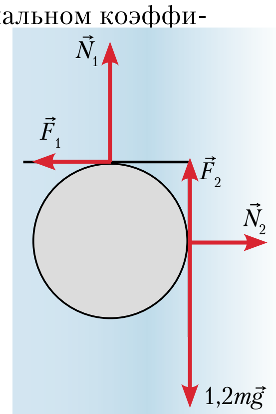
$$\delta Q = \Delta U + \delta A,$$

где ΔU и δA – изменение внутренней энергии газа и его работа в этом процессе. Но изменение энергии связано с изменением температуры, которое определяется произведением давления на объём и которое, следовательно, в 6 раз больше в любом элементарном процессе во втором цикле, чем в соответствующем элементарном процессе в первом. Аналогично, работа газа в каждом элементарном процессе во втором цикле в 6 раз больше работы в соответствующем элементарном процессе в первом ($A = p\Delta V$, в два раза возросло давление, в три раза – объём). Поэтому и количество теплоты, полученное газом от нагревателя в течение всего второго цикла в 6 раз больше аналогичной величины в первом.

Итак, и работа, совершённая газом за цикл, и количество теплоты, полученное от нагревателя в течение цикла, во втором случае в 6 раз больше, чем в первом. А это значит, что КПД второго процесса равен КПД первого.

5. Квадратная пластина изогнута под прямым углом так, что длина одной стороны получившегося двугранного угла в 1,2 раза больше другой. Пластину кладут на закреплённый горизонтальный цилиндр, диаметр которого равен длине короткой стороны двугранного угла. При этом короткая сторона угла располагается горизонтально, длинная – вертикально (см. рисунок). При каком минимальном коэффициенте трения между пластиной и цилиндром пластина будет в равновесии?





Решение. Силы, действующие на пластину, показаны на рисунке. Здесь $\vec{N}$, $\vec{N}_2$ – силы реакции, $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ – силы трения, $m\vec{g} + 1{,}2m\vec{g} = 2{,}2m\vec{g}$ – сила тяжести (m – масса короткой части пластинки). При этом для удобства вычисления момента полная сила тяжести разде-

Окончание на с. 44

Олимпиадные задачи и вопросы – для учителей и учащихся

Представлены задачи, в основном, высокого уровня сложности. Ведь для участия в олимпиадах высокого класса или для дальнейшего обучения в вузах с высоким рейтингом, навыков решения одних только простых задач явно недостаточно. Однако, во-первых, предлагаемые задачи вполне доступны для понимания и, во-вторых, серьёзнее становятся и темы обсуждения и аппарат исследования.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: олимпиадные задачи по физике, статика, динамика, механические колебания

Продолжение. См. № 1, 2, 5, 6 /2013

А.А. КНЯЗЕВ
aknz@list.ru,
СГ У им. Н.Г. Чернышевского,
ЛПН , г. Саратов

37. Свободное падение. Какой минимальный путь может пролететь за 1 с тело, подброшенное вверх и находящееся всё это время в свободном полёте на отрезке движения до остановки в верхней точке?

Решение. Задачу можно решать, проводя вычисления последовательными шагами. Однако возможно и очень короткое решение. Очевидно, что для прохождения минимального пути тело должно иметь минимальную начальную скорость, но достаточную для того, чтобы тело двигалось только вверх в течение требуемой секунды.

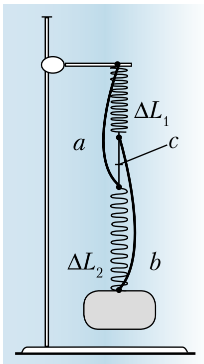
Время движения до верхней точки $t_{min} = \dfrac{v_0}{g}$.

За это время тело пройдёт путь

$$H_{min} = \frac{g \cdot t_{min}^2}{2} \approx 4{,}9 \text{ м.}$$

Значит его нужно подбросить со скоростью 9,8 м/с.

38. Две пружины (по Р.В. Даминову, КФУ, г. Казань). Груз подвесили на двух пружинах, скреплённых нитью *c*. При этом первая пружина оказалась растянутой на $\Delta L_1 = 3$ см, а вторая – на $\Delta L_2 = 6$ см. Затем добавили ещё две нити: *a* и *b* так, что их лёгкое натяжение практически не изменило положения равновесия груза. После этих приготовлений нить *c* перерезали. Как и на сколько изменилось положение груза? Длиной нити *c* пренебречь.



Решение. До перерезания нити *c* пружины соединены последовательно. Следовательно, результирующее растяжение определяется из второго закона Ньютона как $mg = \dfrac{k_1 \cdot k_2}{k_1 + k_2}\Delta L'$. При этом

$\Delta L' = \Delta L_1 + \Delta L_2$, где $k_1 = \dfrac{mg}{\Delta L_1}$ и $k_2 = \dfrac{mg}{\Delta L_2}$.

После перерезания нити пружины оказываются соединёнными параллельно, и жёсткость системы возрастает – груз растягивает систему на $\Delta L''$ в соответствии с соотношением:

Окончание, см. с. 43

лена на две части, которые действуют на короткую и длинную части пластинки и приложены к их центрам тяжести. Из условия сил и моментов (относительно вершины двухгранного угла) имеем:

$$\begin{cases} N_1 + F_2 = 2{,}2mg, \\ N_2 = F_1, \\ N_2 + mg = N_1. \end{cases}$$

В момент начала скольжения для сил трения выполнено условие $F_1 = \mu N_1$, $F_2 = \mu N_2$. Поэтому исключая из системы уравнений силы реакции, получим:

$$\begin{cases} F_1 + F_2 = 1{,}2mg, \\ F_2 = \mu F_1, \\ F_1 = \dfrac{\mu mg}{1-\mu}. \end{cases}$$

Из последней системы уравнений получаем квадратное уравнение относительно коэффициента трения: $\mu^2 + 2{,}2\,\mu - 1{,}2 = 0$. Решая его, получаем: $\mu = \sqrt{2{,}41} - 1{,}1$.