ISSN 1814-6422

Sapere Aude – Дерзай знать!

Потенциал

Ежемесячный журнал для старшеклассников и учителей

№06, 2012

МАТЕМАТИКА ФИЗИКА ИНФОРМАТИКА

Сюрпризы ледяного купола Антарктиды

Отраслевая физико-математическая олимпиада школьников «Росатом»

В течение 20 лет в Московском инженерно-физическом институте (ныне Национальном исследовательском ядерном университете «МИФИ») проводится Всероссийская отраслевая физико-математическая олимпиада школьников «Росатом». Олимпиада проводится в несколько туров – с ноября по март. В 2011 – 2012 учебном году олимпиада «Росатом» входила в перечень олимпиад школьников, утверждённый министром образования РФ, что позволяет победителям и призёрам олимпиады «Росатом» получать значительные льготы при поступлении в вузы.

В олимпиаде «Росатом» 2011 – 2012 года участвовало более 12 тысяч школьников из различных регионов нашей страны. Многие города (а таковых более 20) стали выездными площадками проведения олимпиады. Это Москва, Байконур, Балаково, Волгодонск, Димитровград, Железногорск (Красноярский край), Курск, Курчатов, Липецк, Нижний Новгород, Нововоронеж, Новоуральск, Обнинск, Озерск, Рязань, Санкт-Петербург, Саров, Северск, Сергиев Посад, Смоленск, Снежинск, Тамбов.

Ниже приводятся варианты заданий заключительного тура олимпиады «Росатом» по физике и математике 2011 – 2012 учебного года для 11 класса.

Задание по физике

1. Сосуд разделён на две части закреплённой перегородкой. В одну часть сосуда помещают ν молей кислорода, в другую – 2ν молей гелия. В некоторый момент времени перегородка становится проницаемой для гелия (но непроницаемой для кислорода). Найти отношение объёмов частей сосуда, если давление газа в той части, где первоначально был кислород, увеличилось в $n = 1{,}5$ раза. Температуры газов одинаковы и не меняются в течение процесса.

2. На часах 16.00. Через какое время после этого часовая и минутная стрелки часов встретятся во второй раз?

3. Тело массой $m = 2$ кг аккуратно положили на горизонтальную поверхность и подействовали на него силой $F = 6\,\text{Н}$, направленной под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту (рис. 1). Коэффициент трения между телом и поверхностью равен $k = 0{,}4$. Найти силу трения, действующую на тело ($g = 10$ м/с^2).

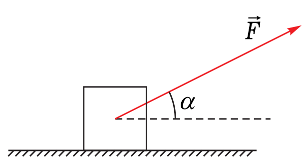

Рис. 1

4. В схеме, изображённой на рисунке 2, проводят следующий процесс: замыкают правый ключ, а после установления равновесия его размыкают и замыкают левый ключ. Найти напряжение на среднем конденсаторе после этого. Чему будет равно напряжение на среднем конденсаторе через очень большое число переключений ключей? Изначально конденсаторы не заряжены. ЭДС источников и ёмкости конденсаторов приведены на рисунке.

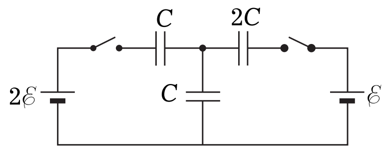

Рис. 2

5. Невесомый недеформируемый стержень длиной l подвешен на трёх одинаковых вертикальных нитях, привязанных к концам и точке, лежащей на расстоянии $l/3$ от его левого конца (см. рисунок 3). На каком максимальном расстоянии справа от точки крепления средней нити можно подвесить массивное тело так, чтобы все нити были натянутыми. Считать, что нити упругие, но слабо растяжимые, а стержень жёсткий.

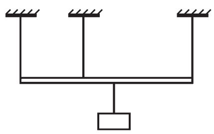

Рис. 3

Задание по математике

1. Найти наибольшее целое число x из области определения функции

$$f(x) = \log_{|x+1|} \frac{(x+3)^2}{(1-x)}.$$

2. Решить неравенство:

$$f(f(x)+1) \le f(x) + \frac{1}{3}, \text{ где } f(x) = \frac{x-2}{x+3}.$$

3. Блоха, находясь в любой точке плоскости, может прыгать в любом направлении, причём длина её прыжка всегда одинаковая и равна $\sqrt{3}$ см. Перед ней стоит задача: из точки A попасть в точку B, удалённую от A на расстояние 187 см. Докажите, что эта задача для неё всегда выполнимая. Какое наименьшее число прыжков она должна совершить?

4. Найти натуральные числа x, для которых

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} \text{НОД}(4; x)\right) \cdot \sin \frac{\pi x}{4} = 0.$$

Из них найти наименьшее x, кратное 22.

5. При каких значениях a система

$$\begin{cases} (2x+y-a+3)(2x+y-a-5) = 0, \\ (x-1)^2 + y^2 = \dfrac{16}{5} \end{cases}$$

имеет ровно два решения? Найти эти решения.

6. В основании треугольной пирамиды $SABC$ расположен правильный треугольник ABC со стороной $\sqrt{5}$. Ребро SA перпендикулярно основанию и имеет длину $2\sqrt{5}$. Точки M и N расположены на рёбрах AS и BC так, что $AM : MS = 1 : 2$, $BN : NC = 1 : 1$. Найти: 1) расстояние между точками M и N; 2) наименьшую длину ломаной, лежащей на поверхности (полной) пирамиды, соединяющей точки M и N.

Решение задания по физике

1. Первоначальное давление в той части сосуда, где был кислород, определяется законом Клапейрона–Менделеева:

$$p_1 V_1 = \nu RT, \qquad (*)$$

где V_1 – объём этой части сосуда, T – абсолютная температура. После того как перегородка становится проницаемой, гелий распределяется по сосуду равномерно, и потому количество вещества гелия в той части сосуда, где был кислород, определяется соотношением

$$\nu_1 = \frac{2\nu V_1}{V_1 + V_2},$$

где V_2 – объём второй части сосуда. Поэтому по закону Дальтона находим новое давление p_1' в этой части сосуда:

$$p_1' V_1 = (\nu + \nu_1) RT = \left(1 + \frac{2V_1}{V_1 + V_2}\right)\nu RT. \, (**)$$

Деля (**) на (*) и учитывая, что давление в этой части сосуда возросло в $n = 1,5$ раза, получим:

$$n = 1 + \frac{2V_1}{V_1 + V_2} = 1 + \frac{2}{1 + x},$$

где $x = V_2 / V_1$. Отсюда находим

$$x = \frac{V_2}{V_1} = \frac{2}{n-1} - 1 = 3.$$

2. Найдём угловые скорости минутной и часовой стрелок часов. Используя определение (отношение угла к тому времени, за которое тело на этот угол повернулось), находим

$$\omega_\text{м} = \frac{2\pi}{T_\text{м}} = \frac{2\pi}{60}\left(\text{мин}^{-1}\right),$$

$$\omega_\text{ч} = \frac{2\pi}{T_\text{ч}} = \frac{2\pi}{12 \cdot 60}\left(\text{мин}^{-1}\right),$$

где число 2π в числителе – угол полного оборота стрелки (в радианах), число 60 в первой формуле в знаменателе – время полного оборота минутной стрелки (в минутах), $12 \cdot 60$ в знаменателе второй формулы – время полного оборота часовой стрелки (в минутах). Поэтому углы, на которые повернутся стрелки до второй встречи, можно найти из соотношений

$$\varphi_\text{м} = \omega_\text{м} t = \frac{2\pi t}{60} \text{ (рад)},$$

$$\varphi_\text{ч} = \omega_\text{ч} t = \frac{2\pi t}{12 \cdot 60} \text{ (рад)},$$

где t – искомое время. Поскольку начальный угол между стрелками равнялся $2\pi/3$ (начальное время на часах – 16.00), а встреча – вторая, угол поворота минутной стрелки на $2\pi + 2\pi/3 = 8\pi/3$ больше угла поворота часовой:

$$8\pi/3 = \omega_\text{м} t - \omega_\text{ч} t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{8\pi}{3(\omega_\text{м} - \omega_\text{ч})} = 87,3 \text{ мин.}$$

3. Очевидно, при действии на первоначально покоящееся тело некоторой «сдвигающей» силы возможны как покой, так и движение тела. При этом в случае покоя сила трения (сила трения покоя) будет равна «сдвигающей» силе, в случае движения (сила трения скольжения) будет равна предельному значению силы трения покоя $F_\text{тр}^\text{max} = kN$, где k – коэффициент трения, N – сила реакции опоры.

Для ответа на вопрос о том, будет или не будет двигаться тело, необходимо сравнить «сдвигающую» силу и максимальную силу трения покоя. В данных условиях «сдвигающей» силой является составляющая внешней силы, направленная вдоль поверхности. Для нахождения силы реакции спроецируем второй закон Ньютона для тела

$$m\vec{a} = \vec{F} + m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}}$$

на ось, перпендикулярную опоре. Получаем:

$$N = mg - F\sin\alpha.$$

Таким образом, тело будет скользить по поверхности при выполнении условия

$$F\cos\alpha > k(mg - F\sin\alpha) \qquad (*)$$

и покоиться в обратном случае. Подставляя в неравенство (*) данные в условии задачи значения, получаем:

$$F\cos\alpha = 5{,}2 \text{ Н},$$

$$k(mg - F\sin\alpha) = 6{,}8 \text{ Н}.$$

Отсюда заключаем, что тело покоится, а сила трения, действующая на него, равна «сдвигающей» силе:

$$F_{\text{тр}} = F\cos\alpha = 5{,}2 \text{ Н}.$$

4. После замыкания правого ключа два последовательно соединённых конденсатора C и $2C$ замкнуты на источник ЭДС $\mathcal{E}$. Поэтому заряды этих конденсаторов Q будут равными друг другу и могут быть найдены из соотношения:

$$\frac{Q}{2C} + \frac{Q}{C} = \mathcal{E}.$$

Отсюда находим заряд, а затем и напряжение на среднем конденсаторе:

$$Q = \frac{2\mathcal{E}C}{3}, \quad U = \frac{2\mathcal{E}}{3}.$$

После размыкания правого и замыкания левого ключа мы имеем два последовательно соединённых конденсатора C, замкнутых на источник $2\mathcal{E}$, причём один из них изначально заряжен зарядом Q. Пусть после замыкания левого ключа верхний левый конденсатор имеет заряд q. Тогда заряд среднего конденсатора будет равен $Q + q$ (см.

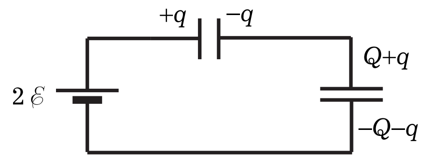

Рис. 4

рис. 4). Поэтому условие равенства суммы напряжений на конденсаторах левой цепи напряжению источника $2\mathcal{E}$ даёт:

$$\frac{q}{C} + \frac{Q+q}{C} = 2\mathcal{E}.$$

Отсюда находим заряд q:

$$q = \frac{2\mathcal{E}C}{3},$$

а затем заряд и напряжение на среднем конденсаторе:

$$q + Q = \frac{4\mathcal{E}C}{3}, \quad U_1 = \frac{4\mathcal{E}}{3}.$$

Напряжение на конденсаторах после большого числа переключений ключей можно найти из следующих соображений. Очевидно, что после большого числа переключений на конденсаторах установятся некоторые напряжения, которые уже не будут меняться при дальнейших переключениях ключей. А это значит, что эти напряжения будут совпадать с напряжениями на конденсаторах при замкнутых ключах. А поскольку результат в этом случае не будет зависеть от того, какой ключ мы замыкаем вначале, замкнём сначала левый ключ (это проще технически). Тогда, поскольку конденсаторы одинаковы, а напряжение левого источника равно $2\mathcal{E}$, и на среднем, и на левом конденсаторе установятся напряжения $\mathcal{E}$. Если теперь замкнуть правый ключ, то благодаря тому, что напряжение правого источника равно $\mathcal{E}$, заряды перемещаться не будут. Следовательно, правый конденсатор вообще не зарядится, а напряжение на среднем конденсаторе останется равным $\mathcal{E}$.

5. Наиболее сложная задача задания, в которой рассматривается так называемая статически неопределённая ситуация. Если бы нити были нерастяжимы, то уравнения статики не позволили бы определить силы натяжения. Действительно, пусть центральная нить на бесконечно малую величину длиннее крайних. В этом случае (при условии нерастяжимости нитей) средняя нить будет ненатянутой и сила её натяжения равна нулю. Если же чуть длиннее будет левая нить, то она останется «провисшей» и сила её натяжения будет равна нулю. Поэтому в условиях нерастяжимости нитей решение задачи зависит от малых разностей длин нитей, а введение в задачу деформаций нитей, превосходящих такие различия в длинах, полностью меняет задачу. Следовательно, в этой задаче необходимо учитывать, что при подвязывании к нитям стержня с грузом они будут деформироваться. Однако по условию деформация нитей мала, поэтому можно считать, что стержень остаётся почти горизонтальным.

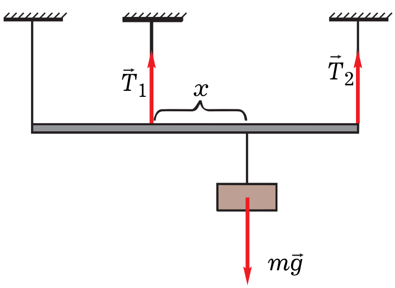

Рис. 5

Далее будем рассуждать так. При отодвигании груза вправо от центральной нити (т. е. при увеличении расстояния x – см. рис. 5) стержень будет немного поворачиваться по часовой стрелке, и будет увеличиваться сила натяжения правой нити и уменьшаться сила натяжения левой. Поэтому при некотором положении груза сила натяжения левой нити может стать равной нулю. Рассмотрим условия равновесия стержня в этот момент. Условия равенства нулю суммы сил и суммы моментов сил (относительно точки прикрепления к стержню нити с грузом) дают:

$$\begin{cases} T_1 + T_2 = mg, \\ T_1 x = T_2\left(\dfrac{2l}{3} - x\right). \end{cases} \qquad (*)$$

Система двух уравнений (*) содержит три неизвестных T_1, T_2 и x и не может быть решена без дополнительных уравнений. Такое уравнение даёт условие упругих деформаций нитей и жёсткости стержня. Очевидно, при нулевой силе натяжения левой нити её удлинение равно нулю. Поэтому удлинения средней и правой нитей относятся друг к другу как 1:3 (см. рис. 6; удлинения нитей отмечены жирными отрезками и обозначены как $\Delta x_{ср}$ и $\Delta x_{пр}$). А поскольку деформации нитей по условию упругие, так же относятся друг к другу и силы натяжения:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{1}{3}. \qquad (**)$$

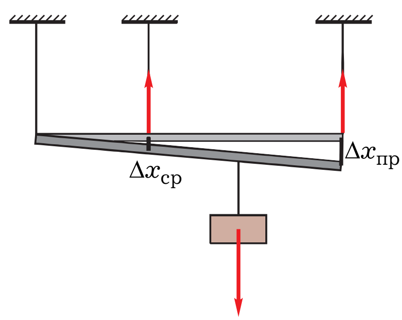

Рис. 6

Решая систему уравнений (*) – (**), находим критическое расстояние x, при котором сила натяжения левой нити становится равной нулю:

$$x = \frac{l}{2}. \qquad (***)$$

При расстояниях x, больших критического значения (***), левая нить «провисает», и стержень висит на средней и правой нитях.

Решение задания по математике

1. Область определения функции задаётся системой неравенств:

$$D_f = \begin{cases} \dfrac{(x+3)^2}{1-x} > 0, \\ |x+1| > 0, \\ |x+1| \neq 1. \end{cases}$$

В её решение попадают все $x < 1,\ x \neq -3, -2,\ -1,\ 0,$ т. е.

$$D_f = (-\infty;\ -3) \cup (-3;\ -2) \cup$$
$$\cup(-2;\ -1) \cup (-1;\ 0) \cup (0;\ 1).$$

Максимальное целое $x \in D_f$ равно –4.

2. Неравенство приобретает привычную форму, если проделать замену $t = f(x) \to f(t+1) \le t + \frac{1}{3}$.

Подставив в аргумент функции $f(x)$ вместо x выражение t+1, получим рациональное неравенство относительно t: $\frac{t-1}{t+4} \le t + \frac{1}{3}$, преобразуем к виду $\frac{(t+1)(3t+7)}{t+4} \ge 0$. Его решением является множество $\left(-4; -\frac{7}{3}\right] \cup [-1; +\infty)$.

Это уже множество значений функции $f(x)$ на множестве решений данного неравенства.

Вернёмся к этим решениям:

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{x-2}{x+3} \ge -1, \\ -4 < \dfrac{x-2}{x+3} \le -\dfrac{7}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{2x+1}{x+3} \ge 0, \\ \begin{cases} \dfrac{2x+3}{x+3} \le 0, \\ \dfrac{x+2}{x+3} > 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

В объединении присутствует система дробно-линейных неравенств с множеством решений $\left(-2; -\frac{3}{2}\right]$, а также решение первого неравенства $(-\infty; -3) \cup \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$. В результате получаем ответ:

$$x \in (-\infty; -3) \cup \left(-2; -\frac{3}{2}\right] \cup \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right).$$

3. Обозначим через m целую часть числа $\frac{187}{\sqrt{3}}$, т. е. наибольшее целое число, его не превосходящее (о доказательстве без калькулятора того, что $m = 107$, см. ниже). За m шагов блоха не сможет из точки A попасть в точку B, поскольку $m\sqrt{3} < 187$. Покажем, как за $m+1$ шаг она сможет осуществить этот манёвр.

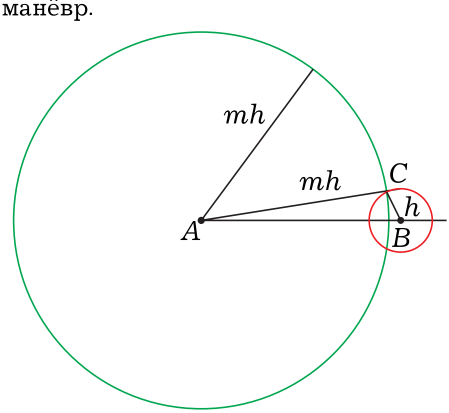

Рис. 1

Нарисуем окружность радиуса mh с центром в точке A ($h = \sqrt{3}$ – шаг блохи), пересекающую окружность радиуса h с центром B в точке C. Путь $A \to C \to B$ – один из возможных путей, реализующих цель блохи за $m+1$ шагов. Докажем, что $107<\frac{187}{\sqrt{3}}<108$. Действительно, возведением в квадрат получим верные неравенства:

$$3\cdot 107^2<187^2<3\cdot 108^2 \rightarrow$$
$$\rightarrow 34347<34969<34992.$$

Тогда $m=107$, и минимальное число шагов блохи равно $m+1=108$. А сколько существует для блохи других путей, решающих ту же задачу за 108 шагов?

4. Все натуральные числа x можно разбить на 4 класса: 1) $x=4k$, 2) $x=4k+1$, 3) $x=4k+2$,

$$4)\ x=4k+3,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Внутри каждого из них уравнение существенно упрощается. Для натуральных x из 2-го или 4-го классов $\text{НОД}(4,x)=1$, и первый сомножитель в левой части исходного уравнения равен нулю. Для натуральных x из 1-го класса $\text{НОД}(4,x)=4$, и второй сомножитель в уравнении равен нулю, поэтому натуральные числа из 1-го, 2-го и 4-го классов являются решениями уравнения.

Для натуральных x из 3-го класса $\text{НОД}(4,x)=2$, первый сомножитель равен -1, а второй

$$\sin\frac{\pi(4k+2)}{4}=\sin\frac{\pi(2k+1)}{2}=(-1)^k\neq 0,$$

т. е. только x из третьего класса не являются решениями уравнения. Поскольку число $x=22$ входит в 3-й класс, то число $x=44$ из 1-го класса является наименьшим решением, кратным 22.

5. Приведём пример алгебраического решения. Система распадается в объединение двух систем:

$$\begin{cases} 2x+y-a+3=0, \\ x^2+y^2=\frac{16}{5}; \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} 2x+y-a-5=0, \\ x^2+y^2=\frac{16}{5}. \end{cases} \quad (2)$$

Произведём анализ зависимости числа решений системы (1) от параметра a. Выражая y из первого уравнения $y=a-3-2x$ и подставляя его во второе, получим квадратное уравнение с параметром:

$$(x-1)^2+(a-3-2x)^2=\frac{16}{5}\rightarrow$$

$$\rightarrow 5x^2-2(2a-5)x+a^2-6a+\frac{34}{5}=0.\ (1')$$

Количество его решений определяет дискриминант:

$$D/4=-a^2+10a-9>0.$$

Два решения при $a\in(1;9)$, единственное решение при $a=1$, $a=9$. При остальных значениях a решений нет. Решения системы (1) задаются формулами:

$$\begin{cases} x=\dfrac{2a-5\pm\sqrt{10a-9-a^2}}{5}, \\ y=\dfrac{a-5\mp 2\sqrt{10a-9-a^2}}{5}. \end{cases}$$

То же проделаем для системы (2):

$$y=a+5-2x,$$

$$(x-1)^2+(a+5-2x)^2=\frac{16}{5}\rightarrow 5x^2-$$

$$-2(2a+11)x+a^2+10a+\frac{114}{5}=0. \quad (2')$$

Уравнение (2′) имеет два решения при $a\in(-7;1)$, а решения системы (2) определяются формулами:

$$\begin{cases} x=\dfrac{2a+11\pm\sqrt{7-6a-a^2}}{5}, \\ y=\dfrac{a+3\mp2\sqrt{7-6a-a^2}}{5}. \end{cases}$$

Система имеет единственное решение при $a=-7$ и $a=1$.

Поскольку при $a=1$ исходная система имеет два решения

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{13}{5}, \\ y_1=\dfrac{4}{5}, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2=-\dfrac{3}{5}, \\ y_2=-\dfrac{4}{5}, \end{cases}$$

то интервал $(-7;9)$ составляют значения параметра, удовлетворяющие условию задачи.

6. (1) Ответ на первый вопрос задачи даёт теорема Пифагора, применённая к треугольнику MAN (рис. 2):

$$MA=\frac{2\sqrt5}{3},\ NA=\frac{\sqrt{15}}{2},\ MN^2=$$

$$=MA^2+NA^2=\frac{215}{36},\ MN=\frac{\sqrt{215}}{6}.$$

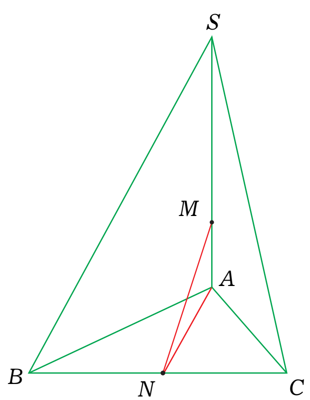

Рис. 2

Нахождение кратчайшего маршрута по поверхности пирамиды связано с выбором направления движения: а) переход из M в N через ребро AC или симметричный ему путь через ребро AB; б) переход из M в N через ребро SC или симметричный ему путь через ребро SB.

(2) Вычисление кратчайшего пути через ребро AC (рис. 3).

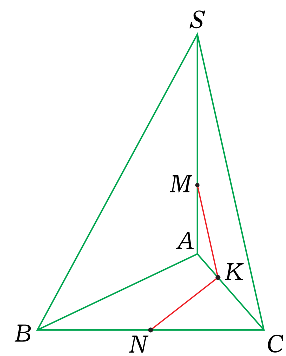

Рис. 3

Для нахождения точки K на ребре AC построим развёртку боковой поверхности призмы по ребру AC (рис. 4).

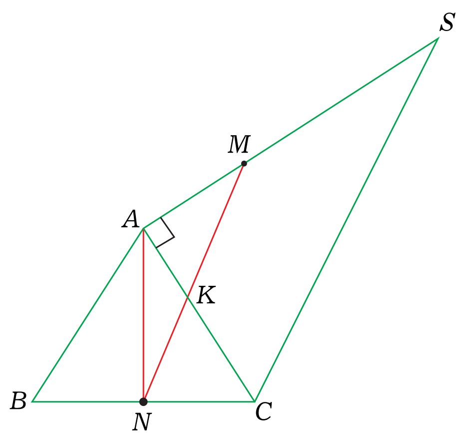

Рис. 4

Вычисление длины отрезка MN можно производить по теореме косинусов для треугольника AMN. По условию задачи $\angle NAM=120°$. Поэтому:

$$MN^2=AM^2+AN^2-2AM\cdot AN\cos120°=$$

$$=\frac{215+60\sqrt{3}}{36}\to MN_{AC}=\frac{\sqrt{215+60\sqrt{3}}}{6}.$$

(3) Вычисление кратчайшего пути через ребро SC (рис. 5).

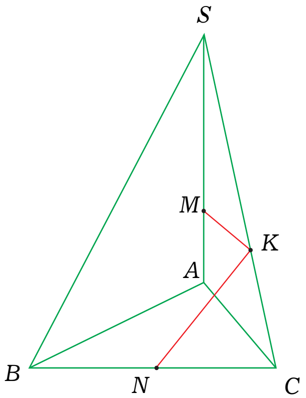

Рис. 5

Для нахождения необходимой точки K на ребре SC построим развёртку поверхности пирамиды через ребро SC (рис. 6).

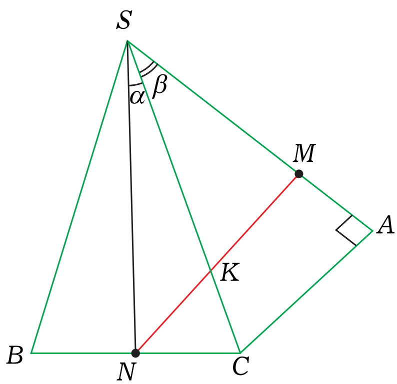

Рис. 6

Вычисление длины отрезка MN в треугольнике SMN сводится к нахождению косинуса угла NSM.

По условию задачи,

$$SC=5,\ NC=\frac{\sqrt{5}}{2},\ SN=\frac{\sqrt{95}}{2},\ SM=\frac{4\sqrt{5}}{3}.$$

$$\angle NSC=\alpha\to\sin\alpha=\frac{1}{2\sqrt{5}},\quad \cos\alpha=\frac{\sqrt{19}}{2\sqrt{5}}.$$

$$\angle CSA=\beta\to\sin\beta=\frac{1}{\sqrt{5}},\quad \cos\beta=\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{2\sqrt{19}-1}{10}.$$

По теореме косинусов для треугольника NSM:

$$MN^2=SN^2+SM^2-2SN\cdot SM\cdot\cos(\alpha+\beta)=$$

$$=\frac{263+24\sqrt{19}}{36}\to MN_{SC}=\frac{\sqrt{263+24\sqrt{19}}}{6}.$$

Для нахождения ответа осталось только сравнить длины MN_{AC} и MN_{SC} (без калькулятора):

$$263+24\sqrt{19}>215+60\sqrt{3}\to 48+24\sqrt{19}>$$

$$>60\sqrt{3}\to 4+2\sqrt{19}>5\sqrt{3}\to 4\cdot 19>$$

$$>(5\sqrt{3}-4)^2\to 76>75-40\sqrt{3}+16\to$$

$$\to 40\sqrt{3}>15\to 8\sqrt{3}>3\to 8>\sqrt{3}.$$

Итак, путь через ребро AC оказывается более коротким, поэтому ответ на второй вопрос задачи такой: длина самого короткого пути из точки M в точку N по поверхности пирамиды равна

$$MN_{AC}=\frac{\sqrt{215+60\sqrt{3}}}{6}.$$

С.А. Гришин, С.Е. Муравьев,
Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ».

Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор

– Какое это время: «Я купаюсь, ты купаешься, он купается»?
– Летние каникулы!