

Задания

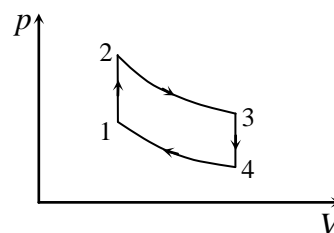
Олимпиадной части Всероссийского конкурса научных работ школьников «Юниор», Инженерные науки, 11 класс

Задания

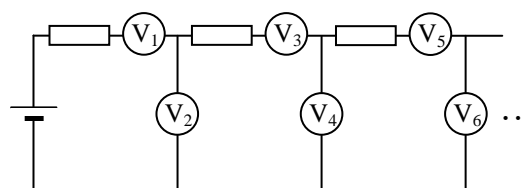
1. При каких значениях x выражение $\cos^2(\pi \cos x) + \sin^2(2\pi\sqrt{3} \sin x)$ принимает минимальное значение?

2. Чтобы бороться с мышатами кот Леопольд должен ежедневно пить озверин. У кота в шкафу стоит бутылка раствора озверина в воде (бесцветная прозрачная жидкость) объемом $V = 0,5$ л с объемной концентрацией озверина $C_0 = 40\%$. Ежедневно Леопольд выпивает $v = 50$ мл раствора, и чтобы не заметили мышата, доливает в бутылку такой же объем воды. Найти объемную концентрацию озверина в бутылке после того, как кот выпил $n = 5$ раз по $v = 50$ мл жидкости и после каждого раза доливал в бутылку воду.

3. С идеальным газом проводят циклический процесс 1-2-3-4-1 из двух изотерм (2-3 и 4-1) и двух изохор (1-2 и 3-4; см. рисунок). Известно, что отношение температур на изотермах 2-3 и 4-1 равно $T_{2-3}/T_{4-1} = 3$, а на участке изотермического расширения газ получал в 2 раза больше тепла, чем на участке изохорического нагревания. Найти КПД цикла.



4. Электрическая цепь, показанная на рисунке, содержит очень большое количество одинаковых резисторов и одинаковых вольтметров. Известно, что показания вольтметров V_1 и V_2 равны $U = 4$ В и $U' = 6$ В (правда, неизвестно какое показание к какому вольтметру относится)). Найти показания вольтметров V_3 и V_4 , а также сумму показаний всех вольтметров.



5. На вход задается целое число N . Требуется написать программу, которая бы находила такое разложение числа N на сумму квадратов натуральных чисел, что количество слагаемых в этом разложении было минимально. Например, $N=11$:

$$11 = 3^2 + 1^2 + 1^2$$

$$11 = 2^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$$

$$11 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$$

Разложение $11 = 3^2 + 1^2 + 1^2$ имеет наименьшее количество слагаемых.

В единственной строке входных данных содержится целое число N в пределах от 1 до 100000 (включительно): $1 \leq N \leq 100000$. В качестве ответа программа должна выдавать через пробел в произвольном порядке целые числа, сумма квадратов которых образует искомое разложение числа N . Если минимальных по длине разложений несколько, вывести любое из них.

Примеры входных данных и результатов работы программы:

<i>Пример входных данных</i>	<i>Пример результата</i>
11	3 1 1
12	2 2 2
76	2 6 6

Комментарии к задаче № 5 (давался школьникам вместе с условием задачи)

Решением задачи является код программы, написанный на любом традиционном языке программирования, с указанием этого языка. В случае невозможности написать код на традиционном языке программирования, в качестве частичного решения может быть принят правильный алгоритм программы, оформленный в виде блок-схемы или псевдокода.

Программа должна читать входные данные из стандартного потока ввода (так, как будто эти данные вводятся с клавиатуры) и выводить результаты в стандартный поток вывода (так, как будто эти данные печатаются на экран). Программа должна корректно работать на входных данных, описанных в условиях задачи. Корректность входных данных гарантируется, проверять её дополнительно внутри программы не требуется (если в условии задачи сказано, что на вход подается целое число от 0 до 1000, не нужно дополнительно проверять, что введена, например, текстовая строка, или число вне этого диапазона).

Программа должна в результате работы выводить только тот ответ, который требуется по условию (может сопровождаться кратким текстовым оформлением или без него). Любой другой вывод результатов в процессе работы программы будет считаться ошибкой. Для лучшего понимания условий задачи и форматов входных и выходных данных, задача сопровождается несколькими примерами корректных входных данных и правильного результата работы, приведенных в разделе *«примеры входных данных и результатов работы программы»*.

Написанная программа должна работать *эффективно*, то есть вычислять правильный ответ, по возможности, за наименьшее время. Программы, написанные *существенно неэффективно*, то есть затрачивающие существенно больше времени, чем эффективные решения, будут считаться неполным решением.

Код программы должен быть написан разборчиво, аккуратно, сопровождается отступами и разумным количеством комментариев в коде программы. Допускается несколько несущественных синтаксических ошибок в коде, при условии, что они не влияют на общую возможность чтения и понимания кода. Неаккуратно написанный (нечитаемый) код программы и/или большое количество синтаксических ошибок могут привести к снижению общей оценки за задачу.

Пример оформления решения (кода программы) (давался школьникам вместе с условием):

```
{pascal} //указание языка, на котором написана программа
program MyProg;
var: ...
begin
  {считываем входные данные} //комментарии в теле программы
  readln(a,b);
  ...
  {основное тело программы}
  ...
  {выводим ответ}
  writeln('Искомое число: ',x);
end.
```

Решения

1. Ответ: $x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi t, t \in Z$. **Решение.** Проверим, не могут ли синус и косинус в данном выражении при каких-то значениях x одновременно обращаться в нуль. Если да, то при этих значениях x данное выражение принимает минимальное значение.

$$\begin{cases} \cos(\pi \cos x) = 0 \\ \sin(2\pi\sqrt{3} \sin x) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \cos x = 1/2 + k, k \in Z \\ \sin x = \frac{m}{2\sqrt{3}}, m \in Z \end{cases}$$

С учетом области значений косинуса, имеется два возможных значения $k = 0, k = -1$.

Случай 1. $k = 0$

$$\cos x = 1/2 \rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{4} \rightarrow \sin^2 x = \frac{3}{4} = \frac{m^2}{12} \rightarrow m^2 = 9 \rightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = -3 \end{cases}$$

$$1) \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \\ \sin x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \rightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi t, t \in Z$$

Случай 2. $k = -1$

$$\cos x = -1/2 \rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{4} \rightarrow \sin^2 x = \frac{3}{4} = \frac{m^2}{12} \rightarrow m^2 = 9 \rightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = -3 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \cos x = -\frac{1}{2} \\ \sin x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \rightarrow x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi t, t \in Z$$

Объединяя серии, получим ответ $x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi t, t \in Z$

2. Найдем изменение концентрации раствора озверина после того как кот выпил одну порцию. По определению объемной концентрации

$$C_0 = \frac{v_0}{V}$$

где C_0 - объемная концентрация раствора, v_0 - первоначальный объем озверина в бутылке, V - полный объем раствора. Поэтому после того как кот выпил v мл раствора, в растворе осталось

$$v'_0 = C_0(V - v)$$

озверина. А поскольку объем раствора после доливания воды снова стал V , новая объемная концентрация раствора C_1 равна

$$C_1 = \frac{v'_0}{V} = \frac{C_0(V - v)}{V} = C_0 \left(1 - \frac{v}{V}\right)$$

После того как кот выпил вторую порцию озверина, его концентрация в растворе находится аналогично

$$C_2 = C_1 \left(1 - \frac{v}{V}\right) = C_0 \left(1 - \frac{v}{V}\right)^2$$

Поэтому после того как кот выпил n порций озверина (доливая после каждой воду в бутылку), его концентрация в бутылке будет равна

$$C_5 = C_0 \left(1 - \frac{v}{V}\right)^n = 23,6\%$$

3. Пусть на участке изотермического расширения газ получил количество теплоты Q . Тогда на участке изохорического нагревания газ по условию получил количество теплоты $Q/2$. Следовательно в течение цикла газ получил от нагревателя количество теплоты

$$Q_n = \frac{3}{2}Q$$

Найдем работу газа. Работа совершается только в процессах 2-3 и 4-1, причем по модулю работа газа в этих процессах отличается втрое (поскольку при одном и том же объеме давление в процессе 2-3 втрое больше давления в процессе 4-1, а работа – это площадь под графиком процесса в координатах $p-V$). Поэтому работа газа в течение цикла есть

$$A = Q - \frac{1}{3}Q = \frac{2}{3}Q$$

Отсюда находим КПД цикла

$$\eta = \frac{A}{Q_n} = \frac{4}{9}$$

4. Поскольку ток, текущий через вольтметр V_1 , больше тока, текущего через вольтметр V_2 , сопротивления вольтметров одинаковы, а каждый вольтметр показывает напряжение на нем, то значение $U' = 6$ В является показанием вольтметра V_1 , $U = 4$ В – показанием вольтметра V_2 , причем отношение токов, текущих через вольтметры V_1 и V_2 равно

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{U'}{U} = \frac{3}{2} \Rightarrow I_2 = \frac{2}{3}I_1$$

Поскольку ток, текущий через вольтметр V_1 , делится на токи, текущие через V_2 и V_3 , то ток, текущий через вольтметр V_3 , равен

$$I_3 = \frac{1}{3}I_1.$$

Поэтому сопротивление цепочки, показанной на рисунке справа, вдвое больше сопротивления вольтметра $R_x = 2R$, где R – сопротивление вольтметра, R_x – сопротивление, показанного на рисунке участка цепи. С другой стороны, если отрезать одно звено, от бесконечной цепи, то ее сопротивление не изменится.

Поэтому сопротивление цепи, показанной на рисунке, также будет равно R_x . Отсюда

$$R_x = r + R + \frac{RR_x}{R + R_x}$$

где r – сопротивление резистора. Учитывая, что $R_x = 2R$, находим

$$r = \frac{R}{3}$$

Следовательно, напряжение на резисторе в первом звене рассматриваемой цепи $U_r = 2$ В, а напряжение создаваемое источником на всей нашей цепи, есть

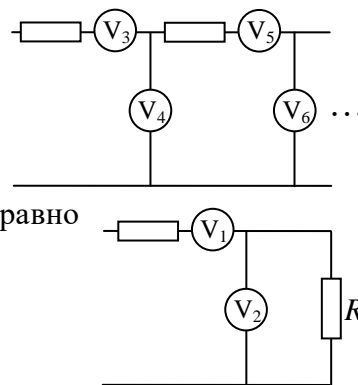
$$U = U_r + U' + U = 12 \text{ В.}$$

Ко второму звену нашей цепи приложено втрое меньшее напряжение $U = 4$ В. Это значит, что показания вольтметров во втором звене цепи V_3 и V_4 будут втрое меньше показаний вольтметров в первом

$$U_3 = 2 \text{ В, } U_4 = \frac{4}{3} \text{ В}$$

Т.е. их сумма будет равна

$$U_3 + U_4 = \frac{10}{3} = \frac{1}{3}(U_1 + U_2)$$



Аналогично, сумма показаний вольтметров V_5 и V_6 составит одну треть от суммы показаний вольтметров V_3 и V_4

$$U_5 + U_6 = \frac{1}{3}(U_3 + U_4) = \frac{1}{9}(U_1 + U_2)$$

Отсюда заключаем, что сумма показаний всех вольтметров будет равна

$$\sum U = U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + \dots = (U_1 + U_2) \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots \right)$$

Находя сумму геометрической прогрессии в скобках, получим

$$\sum U = \frac{3}{2}(U + U') = 15 \text{ В}$$

5.

{pascal}

```
program task_11;
```

```
var
```

```
  N:integer;
```

```
  m_len:array[1..10000] of integer;//массив для записи длины минимального разложения
```

```
  m_val:array[1..10000] of integer;//массив для сохранения слагаемых минимального разложения
```

```
//объявляем рекурсивную функцию вычисления результата
```

```
//функция возвращает длину минимального разложения на квадраты для входного аргумента x
```

```
function getMinDec(x:integer):integer;
```

```
var
```

```
  i:integer;
```

```
  r,imin,rmin:integer;
```

```
begin
```

```
  if m_len[x]>0 then//результат (длина минимального разложения) уже ранее рассчитан, возвращаем  
    getMinDec:=m_len[x]
```

```
  else if abs(sqrt(x)-round(sqrt(x)))<1e-9 then//число является полным квадратом, результат - 1  
    begin
```

```
      m_len[x]:=1;//запоминаем значение рекурсии для данного x
```

```
      m_val[x]:=round(sqrt(x));//запоминаем, добавлением какого элемента это значение было получено
```

```
      getMinDec:=1;
```

```
    end
```

```
  else
```

```
    begin
```

```
      rmin:=x+1;//инициализируем значением, заведомо большим оптимального ответа
```

```
      for i:=1 to trunc(sqrt(x)) do//перебираем все разложения, получаемые из текущего вычитанием од-  
ного полного квадрата
```

```
        begin
```

```
          r:=getMinDec(x-sqr(i))+1;//получаем длину нового разложения
```

```
          if r<rmin then//сравниваем с текущим оптимумом
```

```
            begin
```

```
              rmin:=r;//обновляем оптимум
```

```
              imin:=i;
```

```
            end;
```

```
          end;
```

```
        m_len[x]:=rmin;//запоминаем значение рекурсии для данного x
```

```
        m_val[x]:=imin;//запоминаем, добавлением какого элемента это значение было получено
```

```
        getMinDec:=rmin;
```

```
      end;
```

```
end;
```

```
begin
```

```
  readln(N);
```

```
  fillchar(m_len,sizeof(m_len),0);
```

```
  fillchar(m_val,sizeof(m_val),0);
```

```
  getMinDec(N);//вызываем рекурсию для вычисления ответа с запоминанием в массив m
```

```
  while N>0 do//восстанавливаем и выводим ответ
```

```
    begin
```

```
      write(m_val[N],' ');//выводим одно слагаемое оптимального разложения
```

```
      N:=N-sqr(m_val[N]);//определяем остаточную сумму
```

```
    end;
```

```
end.
```