Решения
Задач заключительного тура олимпиады «Росатом» 2016-2017 учебного года
Математика, 11 класс, комплект 1

1. Для каждой пары целых, положительных чисел (m,n), связанных соотношением $3m+2n=19$, найти решение x уравнения $2^{r_n x}+r_m\cdot 2^x-8=0$, где r_k- остаток от деления k на 3.

1. Ответ: 1) $x=1$ для $m=5,n=2$; 2) $x=1,5$ для $m=3,n=5$; 3) $x=\log_2(\sqrt{33}-1)-1$ для $m=1,n=8$

Решение

Описание пар (m,n): $\begin{cases} m=1-2t>0 \\ n=3t+8>0, t\in Z \end{cases} \to t=-2,-1,0\to r_m=2$ при всех допустимых t.

Случай 1. $t=-2\to m=5,n=2\to r_m=r_n=2\to 2^{2x}+2\cdot 2^x-8=0\to x=1$

Случай 2. $t=-1\to m=3,n=5\to r_m=0,\ r_n=2\to 2^{2x}=8\to x=1,5$

Случай 3. $t=0\to m=1,n=8\to r_m=1,r_n=2\to 2^{2x}+2^x-8=0\to x=\log_2(\sqrt{33}-1)-1$

2. Найти все x, для которых $\sin a_n x+\sin a_{n+1}x+\sin a_{n+2}x=0$ при всех n, где a_n- арифметическая прогрессия с разностью $d=\pi/10$ и первым членом $a_1=\pi/2$.

2. Ответ: 1) $x=\dfrac{20(3k\pm 1)}{3}, k\in Z$; 2) $x=10k, k\in Z$

Решение

Преобразование:

$$\sin a_n x+\sin a_{n+1}x+\sin a_{n+2}x=2\sin\frac{a_n+a_{n+2}}{2}\cos dx+\sin a_{n+1}x=\sin a_{n+1}x\left(2\cos dx+1\right)=0$$

Случай 1.

$$\cos\frac{\pi x}{10}=-\frac{1}{2}\to\left[\begin{array}{l}\dfrac{\pi x}{10}=\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k, k\in Z\\ \dfrac{\pi x}{10}=-\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k, k\in Z\end{array}\right.\to\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{20(3k+1)}{3}\\ x=\dfrac{20(3k-1)}{3}\end{array}\right.\to x=\frac{20(3k\pm 1)}{3}, k\in Z$$

Случай 2.

$$\sin a_{n+1}x=0\to a_{n+1}x=\pi m\to a_{n+1}=\frac{\pi m}{x}.$$

x не зависит от n, $m-$ целое число, a_n- арифметическая прогрессия, поэтому $m=An+B$ с целыми A и B

$$a_{n+1}=\frac{\pi}{x}(An+B)\rightarrow\frac{\pi A}{x}=d=\frac{\pi}{10}\rightarrow x=10A,$$

$$a_1=\frac{\pi}{x}B=\frac{\pi B}{10A}=\frac{\pi}{2}\rightarrow B=5A$$

С другой стороны, $a_{n+1}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{10}n=\frac{\pi}{10}(n+5)$ и $x=\frac{\pi m}{a_{n+1}}=\frac{\pi(An+5A)}{\frac{\pi}{10}(n+5)}=10A$, где $A-$ произвольное целое число.

3. Сколько существует различных, целых, положительных, двенадцатиразрядных чисел, делящихся на 9, в записи которых используется две цифры 3 и 4?

3. Ответ: $C_{12}^3=220$

Решение

Пусть в записи числа используется k троек и m четверок, $m+k=12, m\geq 1, k\geq 1$

Тогда по признаку делимости на 9 сумма цифр числа должна быть кратна 9:

$\begin{cases} 3k+4m=9t \\ m+k=12,\, m\geq 1, k\geq 1 \end{cases}$. Заметим, что из первого уравнения $m=3s$, а из второго $k=3u$, поэтому $\begin{cases} 3u+4s=3t \\ s+u=4, s\geq 1, u\geq 1 \end{cases}\rightarrow\begin{cases} s=3v\rightarrow u+4v=t \\ s=3,\, u=1,\, v=1,\, t=5 \end{cases}$

Итак, в записи искомых чисел участвуют 3 тройки и 9 четверок. Надо разместить различными вариантами 3 тройки на имеющихся 12 позициях, остальные места займут четверки. Число таких вариантов $C_{12}^3=220$.

4. Случайно выбранное шестизначное целое положительное число оканчивается на 32. Найти вероятность того, что оно делится на 14.

4. Ответ: $P(A)=\frac{1285}{9000}=\frac{257}{1800}$

Решение.

Всякое целое число A, делящееся на 14 и оканчивающееся на 2, имеет вид $A=14(5k+3),\ \ k\geq 0, k\in Z$. Если оно оканчивается на 32, то его можно представить в виде $A=100m+32,\, m\geq 0, m\in Z$. Объединяя два этих условия, приходим к уравнению $100m+32=70k+42\rightarrow 10m-7k=1$.

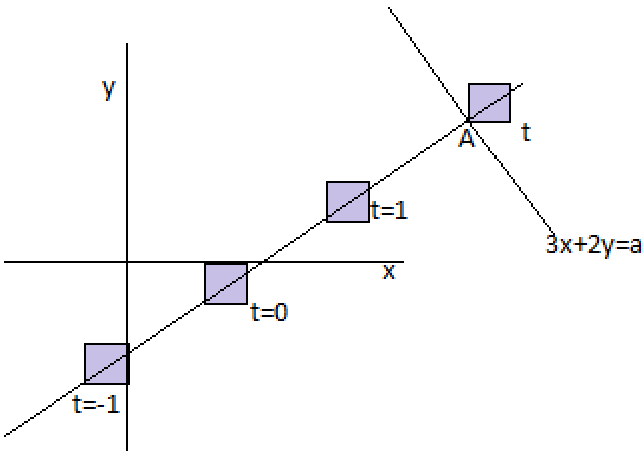
Его общее решение $\begin{cases} m=5+7t \\ k=7+10t \end{cases}, t\geq 0, t\in Z$. Тогда выбранное число, оканчивающееся на 32 и делящееся на 14, имеет вид $A=700t+532$. Количество таких шестизначных таких чисел определяется неравенством $100000\leq 700t+532\leq 999999\rightarrow t=143,144,\ldots,1427$. Всего 1285 чисел (число благоприятных событий). Общее число шестизначных чисел, оканчивающихся на 32 равно 9000 (общее число опытов). Поэтому искомая вероятность $P(A)=\frac{1285}{9000}=\frac{257}{1800}$.

5. При каких значениях a система $\begin{cases} 2[x]-3[y]=7 \\ 3x+2y=a \end{cases}$ имеет единственное решение? Здесь $[z]$ - целая часть числа z - наибольшее целое число, не превосходящее z.

5. Ответ: $a=13t+4, t\in Z$

Решение

Первое уравнение системы – линейное уравнение с целыми решениями, поэтому $\begin{cases} [x]=3t+2 \\ [y]=2t-1, t\in Z \end{cases}$. Тогда для каждого $t\in Z$ решениями первого уравнения являются пары $(x;y)$, для которых $x\in[3t+2;3t+3), y\in[2t-1;2t)$ (квадраты со стороной 1)



Пусть A вершина квадрата с координатами $A(3t+2;2t-1)$, соответствующими целому решению первого уравнения системы. Значение a, при котором прямая $3x+2y=a$ проходит через точку A искомое: $a=3(3t+2)+2(2t-1)=13t+4, t\in Z$

Задача 6 Ответ: $S_{EABMN}:S_{EABCD}=\frac{(x+1)^2(\cos\alpha+\cos\beta)}{4(1+\cos\alpha)}=\frac{25(\sqrt{13}+1)\sqrt{2}}{36(\sqrt{26}+1)}$

$$x=\frac{2}{3}; tg\beta=1; \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{26}}; \cos\beta=\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{\cos\alpha+\cos\beta}{1+\cos\alpha}=\frac{\sqrt{13}+1}{\sqrt{26}+1}; \frac{(x+1)^2}{4}=\frac{25}{36}$$

6. Через ребро AB основания правильной четырехугольной пирамиды $EABCD$ проведена плоскость P, пересекающая ребра EC и ED в точках M и N соответственно. Плоскость P делит объем пирамиды в отношении $V_{EABMN}:V_{EABCD}=5:9$. Найти отношение площадей полных поверхностей пирамид $S_{EABMN}:S_{EABCD}$, если боковые грани пирамиды $EABCD$ наклонены к плоскости основания $ABCD$ под углом $\alpha=arctg5$.

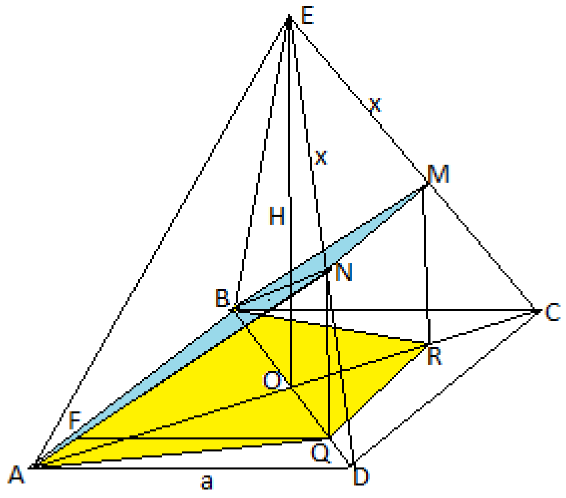
6. $\lambda = 5:9, \alpha = arctg5$

$$x = \frac{2}{3}; tg\beta = 1; \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{26}}; \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{\cos\alpha + \cos\beta}{1+\cos\alpha} = \frac{\sqrt{13}+1}{\sqrt{26}+1}; \frac{(x+1)^2}{4} = \frac{25}{36}$$

Ответ: $S_{EABMN} : S_{EABCD} = \frac{(x+1)^2(\cos\alpha + \cos\beta)}{4(1+\cos\alpha)} = \frac{25(\sqrt{13}+1)\sqrt{2}}{36(\sqrt{26}+1)}$

Решение

Обозначение $EM : EC = EN : ED = x$,
$V = V_{EABCD}, S = S_{EABCD}, \sigma = S_{EAB}, \omega = S_{ABCD}, H = EO, a = AB$



$$V_{EABN} = x \cdot \frac{V}{2}, V_{EBMN} = x^2 \cdot \frac{V}{2} \to V_{EABMN} = \frac{V}{2}\left(x + x^2\right) \to \frac{x+x^2}{2} = \lambda \in [0,1] \to x^2 + x - 2\lambda = 0,\ x \in [0,1]$$

$\beta -$ угол наклона плоскости P к плоскости основания.

$$tg\beta = \frac{QN}{QF}, \frac{QN}{H} = (1-x) \to QN = (1-x)H; \frac{QF}{a} = \frac{BQ}{a\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2} - QD}{a\sqrt{2}} = 1 - \frac{QD}{a\sqrt{2}};$$

$$\frac{2QD}{a\sqrt{2}} = (1-x) \to QD = \frac{(1-x)a}{\sqrt{2}} \to QF = \frac{(x+1)a}{2} \to tg\beta = \frac{2(1-x)H}{(x+1)a} = \frac{1-x}{x+1} tg\alpha$$

$$S_{ABMN} = S_{ABRQ} / \cos\beta,\ S_{ABRQ} = 2x \cdot \frac{\omega}{4} + x^2 \cdot \frac{\omega}{4} + \frac{\omega}{4} = \frac{\omega}{4}(x+1)^2 \to S_{ABMN} = \frac{\omega(x+1)^2}{4\cos\beta}$$

$$S_{EABMN}(полная) = S_{EABMN}(бок) + S_{ABMN}; S_{EABMN}(бок) = 2x\sigma + x^2\sigma + \sigma = \sigma(x+1)^2$$

$$S_{EABMN} = \sigma(x+1)^2 + \frac{\omega(x+1)^2}{4\cos\beta} = (x+1)^2 \frac{4\sigma\cos\beta + \omega}{4\cos\beta}$$

Поскольку $\omega = 4\sigma\cos\alpha$, приходим к соотношению

$$S_{EABMN} = (x+1)^2 \frac{4\sigma\cos\beta + 4\sigma\cos\alpha}{4\cos\beta} = (x+1)^2 \sigma \cdot \frac{\cos\alpha + \cos\beta}{\cos\beta}$$

$S_{EABCD}(\text{полная}) = 4\sigma + \omega = \dfrac{\omega}{\cos\alpha} + \omega = \omega \cdot \dfrac{1+\cos\alpha}{\cos\alpha} = 4\sigma(1+\cos\alpha)$ и искомое отношение полных поверхностей пирамид

$$S_{EABMN} : S_{EABCD} = \frac{(x+1)^2(\cos\alpha + \cos\beta)}{4(1+\cos\alpha)}$$