Решения
Задач заключительного тура олимпиады «Росатом» 2016-2017 учебного года
Математика, 11 класс, комплект 2

1. При каких натуральных n уравнение $\log_2 x+\log_2 x^3+\log_2 x^5+...+\log_2 x^{2n-1}=5040$ имеет рациональное решение?

1. Ответ: $n=1,2,3,4,6,12$

Решение

Преобразование уравнения:

$$1+3+5+...+(2n-1)=n^2 \to n^2\log_2 x=5040=2^4\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7$$

Уравнение имеет рациональное решение, если 5040 делится на n^2 нацело. Это бывает при $n=2,4,3,6,12$

2. Найти наибольшее значение выражения $|x|+|y|+|z|$ для троек $(x;y;z)$, удовлетворяющих системе $\begin{cases}\sin x\cdot\sin(x+y)\cdot\sin(x+y+z)=0\\ x^2+y^2+z^2=\dfrac{\pi^2}{3}\end{cases}$. Найти тройки $(x;y;z)$, для которых наибольшее значение достигается.

2. Ответ: 1) $\left(|x|+|y|+|z|\right)_{\max}=\pi$; 2) шесть троек $(x;y;z)=\pm\left(\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right),\pm\left(\frac{\pi}{3};-\frac{\pi}{3};\pm\frac{\pi}{3}\right)$

Решение.

Выражение $|x|+|y|+|z|\le\pi$, для всех троек $\left(x;y;z)\right)$, удовлетворяющих второму уравнению системы (на сфере), поскольку любая из плоскостей $\pm x\pm y\pm z=a$ при $a>\pi$ удалена от начала координат на расстояние большее, чем $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ и со сферой общих точек не имеет. Если x,y,z одного знака, то плоскости $x+y+z=\pm\pi$ касаются сферы в точках $\left(\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right)$ и $\left(-\frac{\pi}{3};-\frac{\pi}{3};-\frac{\pi}{3}\right)$, а их координаты удовлетворяют первому уравнению системы. Если знаки x и y противоположны, то четыре плоскости $x-y\pm z=\pm\pi$ также касаются сферы в четырех точках $\pm\left(\frac{\pi}{3};-\frac{\pi}{3};\pm\frac{\pi}{3}\right)$, координаты которых удовлетворяют первому уравнению. Если x и y одного знака, то значение выражения $|x|+|y|+|z|$, равное π, возможно в двух точках $\pm\left(\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3};-\frac{\pi}{3}\right)$, координаты которых не удовлетворяют первому уравнению системы.

3. Целые числа $2a^2$ и $3a$ имеют одинаковые остатки при делении на 18. Какие ненулевые остатки может иметь число $a>0$ при делении на 18?

3. Ответ: $r=6, r=12$

Решение. $a=18m+r, 1\le r\le 17$

Число $2a^2-3a=2(18m+r)^2-3(18m+r)=18k+2r^2-3r$ делится на 18, если

$2r^2-3r=18t, t\in Z\to t=\dfrac{r(2r-3)}{18}$ целое число. Поскольку $2r-3$ число нечетное, число r должно быть четным

$r=2k, 1\le k\le 8$. Тогда $t=\dfrac{k(4k-3)}{9}$ - целое число.

Случай 1. $k=3m, m=1, 2$

$t=\dfrac{m(12m-3)}{3}=m(4m-1)$ целое при $m=1$ и $m=2$, поэтому годятся $k=3$ и $k=6$. Тогда допустимое значение остатков $r=6$ и $r=12$

Случай 2. $4k-3=9s\to 9s-4k=-3\to\begin{cases} s=1+4u \\ k=3+9u, u\in Z\end{cases}$.

Поскольку в этом случае k делится на 3 (случай 1), никаких новых решений для r не возникает.

4. Через случайно выбранные три вершины куба с ребром 2 проводится плоскость. Найти вероятность того, что площадь сечения превзойдет 5. Допускается, что эти вершины принадлежат одной грани куба.

4. Ответ: $P(A)=\dfrac{3}{7}$

Решение

Площадь сечения плоскостью, содержащей хотя бы три вершины куба, принимает три возможных значения. Первое $s_1=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$, если ни какие две вершины не принадлежат одному ребру куба (правильный треугольник со стороной $a\sqrt{2}$). В первом варианте $a=2$, поэтому $s_1=2\sqrt{7}\approx 3,46$.

Второе значение площади $s_2=a^2$ реализуется в случае, когда три вершины лежат в одной грани. В первом варианте $s_2=4$. Третье значение $s_3=a^2\sqrt{2}$ реализуется в случае, когда две вершины принадлежат одному ребру, а третья вершина не лежит в грани, которой это ребро принадлежит. В первом варианте $s_3=4\sqrt{2}\approx 5,65$. Таким образом, в условии варианта 1 говорится о вероятности того, что будет реализовано s_3.

Общее число различных троек вершин, через которые может проходить плоскость сечения, равно $n=C_8^3=\dfrac{8\cdot 7\cdot 6}{2\cdot 3}=56$. Если фиксировать одну из восьми вершин куба, то существует единственная тройка вершин (включая выбранную вершину), которой соответствует площадь s_1. Таким образом, число благоприятствующих этому событию троек равно $m_1=8$. Если фиксировать одну из 6 граней, то число различных троек вершин, реализующих s_2 равно $C_4^3=4$. Таким образом, число различных троек, благоприятствующих s_2 равно $m_2=4\cdot 6=24$. Если фиксировать пару параллельных ребер, не лежащих в одной грани (таких пар 6), то число различных троек вершин, благоприятствующих s_3 равно $C_4^3 = 4$, поэтому общее число троек благоприятствующих этому событию равно $m_3 = 6 \cdot 4 = 24$. Вероятность искомого события равна $P(A) = \frac{m_3}{n} = \frac{24}{56} = \frac{3}{7}$.

5. Целое число n таково, что $\cos\frac{\left(2n^2+n+1\right)\pi}{2} = 1$, а уравнение $\sin x \cdot \sin 5x \cdot \sin nx = 1$ имеет решение. Найти все такие n.

5. Ответ: $n = 4m+1, m \in Z$

Решение.

Из первого условия $\cos\left(n^2\pi + \frac{(n+1)\pi}{2}\right) = 1 \to (-1)^{n^2}\cos\left(\frac{(n+1)\pi}{2}\right) = 1$. Если $\cos\left(\frac{(n+1)\pi}{2}\right) = 1$, то $\frac{(n+1)\pi}{2} = 2\pi m \to n = 4m-1, m \in Z$. Тогда $(-1)^{n^2} = -1, \forall m$ и уравнение решений не имеет.

Если $\cos\left(\frac{(n+1)\pi}{2}\right) = -1 \to \frac{(n+1)\pi}{2} = \pi(2m+1) \to n = 4m+1 \to (-1)^{n^2} = -1, \forall m \in Z$. Таким образом, допустимы для второго уравнения $n = 4m+1$.

Каждый из синусов левой части уравнения по модулю равен 1.

Случай 1. $\sin x = 1$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z \to 5x = \frac{5\pi}{2} + 10\pi k \to \sin 5x = 1 \text{ для всех } k$$

Тогда $\sin(4m+1)x = 1 \to \sin\,(4m+1)\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) = \sin\frac{(4m+1)\pi}{2} = \sin(2\pi m + \frac{\pi}{2}) = 1, \forall m \in Z$

Таким образом, $n = 4m+1$ входит в ответ.

Случай 2. $\sin x = -1$

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z \to 5x = -\frac{5\pi}{2} + 10\pi k \to \sin 5x = -1$$

Произведение синусов в левой части уравнения равно 1, если $\sin nx = 1$

$$\sin(4m+1)x = \sin\left(4m+1\right)\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) = \sin\left(2m\pi - \frac{\pi}{2}\right) = -1, \forall m$$

Таким образом, в случае 2 решений нет.

6. Две параллельные прямые, расстояние между которыми 1, пересекают прямоугольник размерами 3×5 под углом $\alpha = arctg\frac{3}{4}$ к его стороне. Найти максимальное возможное значение суммы длин отрезков этих прямых, принадлежащих прямоугольнику.

6. Ответ: $L_{\max} = \frac{55}{6}$

Вариант 0

Две параллельные прямые, расстояние между которыми h, пересекают прямоугольник размерами $a \times b$ под углом α к его стороне. Найти максимальное возможное значение суммы длин отрезков этих прямых, принадлежащих прямоугольнику.

Решение. Для определенности на рис. $a \le b$.

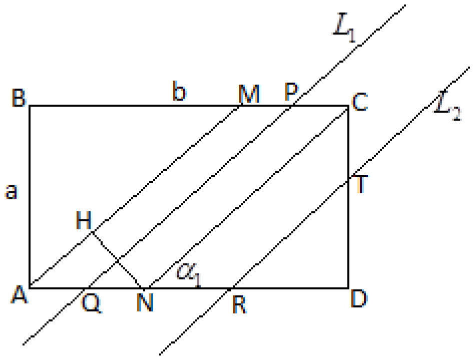

Рис 1

На рис 1 проведены отрезки AM и CN под углом α_1 к стороне AD. Значение α_1 определяется условием того, что расстояние между прямыми AM и CN равно h:

$$AN = b - a \cdot ctg\alpha_1, \;\; HN = AN \sin\alpha_1 \to (b - a \cdot ctg\alpha_1)\sin\alpha_1 = h \to b\sin\alpha_1 - a\cos\alpha_1 = h \;\; (*)$$

Случай 1. Прямые L_1 и L_2 образуют угол α со стороной AD, $\alpha \in \left[\alpha_1; \frac{\pi}{2}\right]$

При фиксированном α максимальное значение суммы $L = l_1 + l_2$ длин отрезков PQ и RS равно $2CN = \frac{2a}{\sin\alpha}$ потому, что расстояние между прямыми AM и CN не меньше h и на отрезке MC можно разместить точки P и T прямых L_1 и L_2.

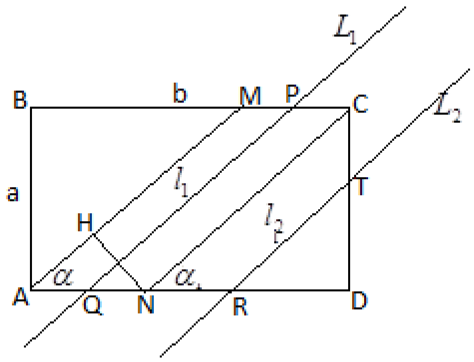

Рис 2

Максимальное значение L на отрезке $\alpha \in \left[\alpha_1; \frac{\pi}{2}\right]$ соответствует минимальному углу, т.е. $\alpha = \alpha_1$, определяемому уравнением (*), $L_{1,\max} = \frac{2a}{\sin\alpha_1} = \frac{2a(a^2+b^2)}{a\sqrt{a^2+b^2-h^2}+bh}$

Случай 2. Прямые L_1 и L_2 образуют угол α со стороной AD, $\alpha \in [\alpha_2; \alpha_1)$, $\alpha_2 = \arcsin\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

В этом случае, расстояние между прямыми AM и CN меньше h, при $\alpha = \alpha_2$ оно равно нулю.

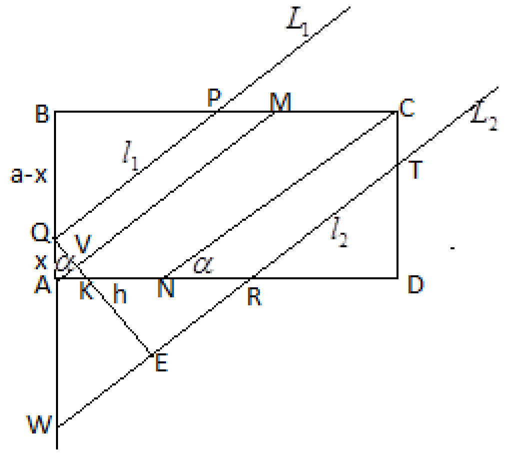

Рис 3

Положение точки Q на стороне AB характеризуется параметром x - длиной отрезка AQ.

Тогда из подобия треугольников $\frac{l_1}{AM} = \frac{a-x}{a} \to l_1 = \frac{a-x}{a}\cdot AM = \frac{a-x}{a}\cdot\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{a-x}{\sin\alpha}$.

Найдем зависимость l_2 от x:

$$QE = h,\ AK = xtg\alpha,\ QK = \frac{x}{\cos\alpha},\ \ KE = h - QK = h - \frac{x}{\cos\alpha},\ \ KR = \frac{KE}{\sin\alpha} = \frac{h\cos\alpha - x}{\cos\alpha\sin\alpha}$$

$$AR = AK + KR = xtg\alpha + \frac{h\cos\alpha - x}{\sin\alpha\cos\alpha} = -\frac{x\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{h}{\sin\alpha},\ \ RD = b - AR = \frac{b\sin\alpha + x\cos\alpha - h}{\sin\alpha}$$

Наконец, $l_2 = \frac{RD}{\cos\alpha} = \frac{b\sin\alpha + x\cos\alpha - h}{\sin\alpha\cos\alpha}$

Тогда при фиксированном $\alpha \in [\alpha_2; \alpha_1)$, $\alpha_2 = \arcsin\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ величина

$$L = l_1 + l_2 = \frac{a-x}{\sin\alpha} + \frac{b\sin\alpha + x\cos\alpha - h}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{a\cos\alpha + b\sin\alpha - h}{\sin\alpha\cos\alpha} \quad (**)$$

не зависит от x, но зависит от α.

Замечание. Если прямые составляют угол α с меньшей стороной $(a > b)$, то в формулах (*) и (**) надо поменять буквы местами.

В варианте 1 $a=3, b=5, tg\alpha=\frac{3}{4}, \sin\alpha=\frac{3}{5}, \cos\alpha=\frac{4}{5}, h=1$

Для случая, когда прямые составляют угол α с большей стороной, уравнение (*) для определения α_1 имеет вид:

$$5\sin\alpha_1-3\cos\alpha_1=1\to\alpha_1=arctg\frac{3}{5}+arctg\frac{1}{\sqrt{33}}\to tg\alpha_1=\frac{3/5+1/\sqrt{33}}{1-3/\left(5\sqrt{33}\right)}=\frac{3\sqrt{33}+5}{5\sqrt{33}-3}$$

Сравниваем значения $tg\alpha$ и $tg\alpha_1$ для выяснения в каком из интервалов $\left[arctg\frac{3}{5};\alpha_1\right]$ или $\left[\alpha_1;\frac{\pi}{2}\right]$ находится заданное α :

$\frac{3\sqrt{33}+5}{5\sqrt{33}-3}\vee\frac{3}{4}\to 12\sqrt{33}+20\vee 15\sqrt{33}-9\to 29\vee 3\sqrt{33}\to 841>297$, т.е.

$tg\alpha_1>tg\alpha\to\alpha\in\left[arctg\frac{3}{5};\alpha_1\right]$ и имеет место случай 1. Тогда L определяется формулой (**)

$$L_2=\frac{3\cdot\frac{4}{5}+5\cdot\frac{3}{5}-1}{\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5}}=\frac{55}{6}.$$

Случай, когда прямые составляют угол α с меньшей стороной,

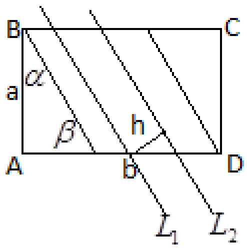

Рис 4

преобразуется в рассмотренный случай заменой угла α на угол $\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha$, который образуют прямые с большей стороной. Поскольку $tg\beta_1=\frac{3\sqrt{33}+5}{5\sqrt{33}-3}<tg\beta=\frac{4}{3}\to ctg\alpha_1<ctg\alpha\to tg\alpha_1>tg\alpha$.

Поэтому для заданного угла реализуется случай 1 и $L_1=\frac{2a}{\sin\beta}=\frac{2a}{\cos\alpha}=\frac{6}{4/5}=\frac{15}{2}$.

Поскольку $L_2=\frac{55}{6}>L_1=\frac{15}{2}$, ответом является L_2.