Решения
Задач заключительного тура олимпиады «Росатом» 2016-2017 учебного года
Математика, 11 класс, комплект 4

1. Отрезок $[2;29]$ числовой оси разбит двумя точками a и b на три отрезка, длины которых x, y и z соответственно. Найти наибольшее возможное значение выражения $\log_3 x + \log_3 y + \log_3 z$.

1. Ответ: $f_{\max} = 6$

Решение

$$z = 27 - x - y \rightarrow f = \log_3 x + \log_3 y + \log_3 (27 - x - y)$$

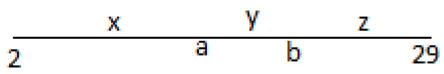


Рис 1

На рис изображено расположение точек a и b , дающее максимальное значение f при $x = x^*, y = y^*, z^* = 27 - x^* - y^*$. Если изменить положение точки a , при этом точку b не менять, то функция $f(x, y^*)$ имеет максимум в точке $x = x^*$, поэтому

$$f'(x, y^*) = \frac{1}{\ln 3}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{27 - x - y^*}\right)\bigg|_{x=x^*} = 0 \rightarrow \frac{1}{x^*} - \frac{1}{27 - x^* - y^*} = 0$$

Аналогично, зафиксировав положение точки a и, изменяя точку b , приходим у тому, что функция $f(x^*, y)$ имеет максимум при $y = y^*$ и ее производная в этой точке равна нулю.

$$f'(x^*, y) = \frac{1}{\ln 3}\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{27 - x^* - y}\right)\bigg|_{y=y^*} = 0 \rightarrow \frac{1}{y^*} - \frac{1}{27 - x^* - y^*} = 0$$

Решая совместно систему, приходим к тому, что $x^* = y^* = z^* = 9$ и $f_{\max} = 3\log_3 9 = 6$

2. Решить уравнение $\cos\left(\arcsin\left(\sin x\right)\right) = \sin\left(\arccos\left(\cos 2x\right)\right)$.

2. Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k,\ x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$

Решение

Преобразование:

$$\cos\left(\arcsin\left(\sin x\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \arccos\left(\cos 2x\right)\right) = \cos\left(\arcsin\left(\cos 2x\right)\right)$$

1. $\arcsin(\sin x) = \arcsin(\cos 2x) + 2\pi k,\ k \in Z$. Заметим, что $|\arcsin\alpha - \arcsin\beta| \le \pi$ для любых допустимых α, β , т.е. равенство возможно только $k = 0$. С учетом монотонности арксинуса

$$\arcsin(\sin x) = \arcsin(\cos 2x) \to \sin x = \cos 2x \to 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \to \left[\begin{array}{l} \sin x = 1/2 \\ \sin x = -1 \end{array}\right.$$

Тогда решениями уравнения являются $x_1 = (-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n,\ \ x_2 = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\, n \in Z$.

2. $\arcsin(\sin x) = -\arcsin(\cos 2x) + 2\pi k,\ k \in Z$. По тем же причинам $k = 0$ и в силу нечетности арксинуса $\sin x = -\cos 2x \to 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \to \left[\begin{array}{l} \sin x = -1/2 \\ \sin x = 1 \end{array}\right.$.

Тогда решениями уравнения являются $x_3 = (-1)^{n+1} \dfrac{\pi}{6} + \pi n,\ x_4 = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\, n \in Z$.

Объединение серий дает ответ $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + \pi k,\ x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$

3. Найти целые положительные делители x и y числа 1232, удовлетворяющие уравнению $5x - 3y + 13 = 0$.

3. Ответ 1) $x = 4,\ y = 11$ 2) $x = 7,\ y = 16$

Решение

Разложение на множители $1232 = 2^4 \cdot 7 \cdot 11$.

Решение уравнения $5x - 3y + 13 = 0 \to \begin{cases} x = 3t - 2 \\ y = 5t + 1, 1 \le t \le 246,\, t \in Z \end{cases}$

Числа $x \ne 1$ и $y \ne 1$ взаимно простые и каждое из них делится на одно из чисел 2, 7 или 11.

Случай 1. $x = 2k -$ четное число.

$$3t - 2 = 2k \to 3t = 2(k+1) \to \begin{cases} t = 2s \\ k = 3s - 1 \end{cases} \to \begin{cases} x = 2(3s-1) \\ y = 10s + 1, 1 \le s \le 123 \end{cases}$$

Число y должно быть делителем числа 1232, и быть нечетным. Таких делителей три 7, 11, 77 и только одному, 11 соответствует $s = 1$ и решения $x = 4,\ y = 11$.

Случай 2. $x = 7m$

$$3t - 2 = 7m \to 3t - 7m = 2 \to \begin{cases} t = 3 + 7s \\ m = 1 + 3s \end{cases} \to \begin{cases} x = 7(3s+1) \\ y = 35s + 16,\, 0 \le s \le 34 \end{cases}$$

Число $y \ge 16$ является делителем числа 1232 и не делится на 7, т.е. может принимать одно из значений: 16, 22, 44, 88, 176. Последние четыре не реализуются, поскольку после вычитания 16 не делятся на 35. А делителю 16 соответствует $s = 0$ и решения $x = 7,\ y = 16$.

Случай 3. $x = 11n$

$$3t - 2 = 11n \to 3t - 11n = 2 \to \begin{cases} t = -3 + 11s \\ n = -1 + 3s, \end{cases} \to \begin{cases} x = 11(3s-1) \\ y = 55s - 14, 1 \le s \le 22 \end{cases}$$

Число $y \ge 41$ является делителем числа 1232 и не делится на 11. Такими делителями могут быть только 56 и 112, но им не соответствует целое s . Таким образом, в случае 3 решений уравнения нет.

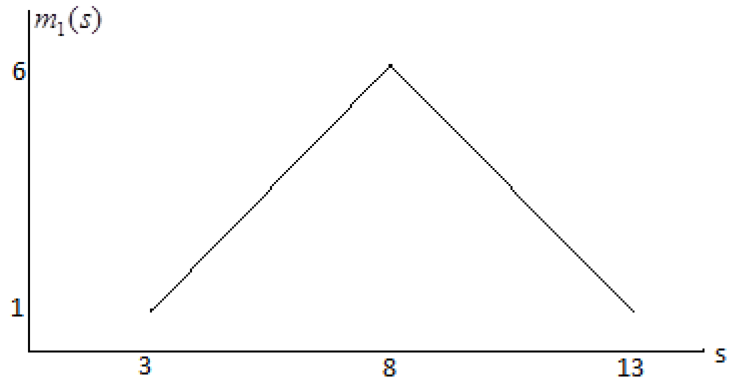
4. Игральная кость представляет собой кубик, на гранях которого отмечено другим цветом от одного до шести очков. Петя случайным образом бросает на стол три игральных кости одновременно и считает сумму числа очков, выпавших на всех костях. Каждое значение s этой суммы, расположенное от 3 до 18, может появится с определенной вероятностью. Найти s , при котором эта вероятность максимально возможная.

4. Ответ: $s = 10$ и $s = 11$

Решение

Пусть x, y, z - числа, выпавшие на первой, второй и третьей кости. Случайная величина $s = x + y + z$ принимает значения от 3 до 18. Общее число исходов опыта $n = 6^3$. Через $m(s)$ обозначим число опытов (число различных троек $(x; y; z)$), благоприятствующих событию $s = x + y + z$. Разложим это событие в сумму шести несовместных событий по числу $z = 1, 2, ..., 6$, выпавших на третьем кубике. Через $m_z(s)$ обозначим число различных троек при фиксированном z . Каждая $m_z(s)$, имеет свою область определения по s . Например, для $z = 1 \to x + y = s - 1 \to 2 \le s - 1 \le 12 \to s \in [3;13]$. Положим, что $m_1(s) = 0$ для $s \in [14;18]$. Или при $z = 4 \to x + y = s - 4 \to 2 \le s - 4 \le 12 \to s \in [6;16]$. Тогда $m_4(s)$ доопределяется нулем для $s = 3, 4, 5, 17, 18$. Очевидно, что $m(s) = \sum_{z=1}^{6} m_z(s)$.

На рис отмечена зависимость $m_1(s)$ - числа различных пар (x, y) решений уравнения $x + y = s - 1$



Например, для $s = 8$ уравнение имеет 6 различных решений. В аналитической форме, $m_1(s) = 6 - |s - 8|, s \in [3;13]$. Остальные $m_z(s)$ находятся из $m_1(s)$ путем сдвига по оси s на единицу:

$$m_2(s) = 6 - |s - 9|, s \in [4;14]$$

$$m_3(s) = 6 - |s - 10|, s \in [5;15]$$

$$m_4(s) = 6 - |s - 11|, s \in [6;16]$$

$m_5(s) = 6 - |s - 12|, s \in [7;17]$

$m_6(s) = 6 - |s - 13|, s \in [8;18]$

Значения $m(s)$ при различных $s \in [3;18]$ получены суммированием $m_z(s)$ с учетом их областей определения. Например, при $s = 3$ ненулевым слагаемым является только $m_1(s)\big|_{s=3} = 1$, а при $s = 10$, слагаемыми $m(s)$ являются все $m_z(s), z = 1, 2, ...6$ и $m(10) = 4 + 5 + 6 + 5 + 4 + 3 = 27$

В таблице приведены все остальные значения $m(s)$ для $s = 3, 4, ..., 18$

s	3	4	5	6	7	8	9	10
m (s)	1	3	6	10	15	21	25	27

s	11	12	13	14	15	16	17	18
m (s)	27	25	21	15	10	6	3	1

Из приведенной таблицы видно, что наибольшую вероятность $p = \frac{27}{6^3} = \frac{1}{8}$ имеют значения $s = 10$ и $s = 11$.

5. Область D на координатной плоскости $k0b$ такова, что для любой точки $(k;b) \in D$ прямая с уравнением $y = kx + b$ имеет с треугольником ABC на координатной плоскости $x0y$ с вершинами $A(-1;2), B(2;1), C(-1;-5)$ хотя бы одну общую точку. Найти площадь пересечения D с полуполосой $k \in [-2;5], b \ge 0$. Для каждого $k \in [-2;5]$ найти b, при котором прямая не пересекает треугольник.

5. Ответ:1) $S = \frac{86}{3}$;

2) $$\begin{cases} b \in (-\infty; k-5] \cup [1-2k; +\infty), \forall k \in \left[-2; -\frac{1}{3}\right] \\ b \in (-\infty; k-5] \cup [k+2; +\infty), \forall k \in \left(-\frac{1}{3}; 2\right] \\ b \in (-\infty; 1-2k] \cup [k+2; +\infty), \forall k \in (2;5] \end{cases}$$

Решение

Обозначение: $f(x, y) = y - kx - b$ Прямая имеет общие точки с треугольником, если она имеет общую точку хотя бы с одной его стороной.

Случай 1. Прямая пересекает сторону AC

$f(x_A, y_A) \cdot f(x_C, y_C) \le 0 \to (2 + k - b)(-5 + k - b) \le 0$ (*)

На рис 1 изображена полоса между прямыми $b = k + 2$ и $b = k - 5$, координаты точек которой удовлетворяют неравенству (*)

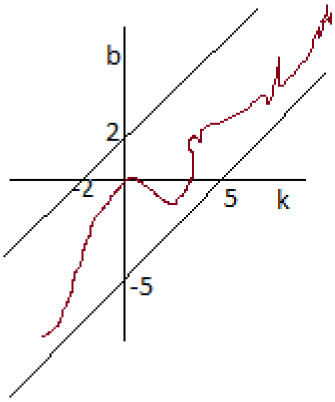


Рис 1

Случай 2. Прямая пересекает сторону AB

$$f(x_A, y_A) \cdot f(x_B, y_B) \le 0 \to (2 + k - b)(1 - 2k - b) \le 0 \text{ (**)}$$

На рис 2 изображена область с границей $b = k + 2$ и $b = 1 - 2k$, координаты всех точек которой удовлетворяют неравенству (**).

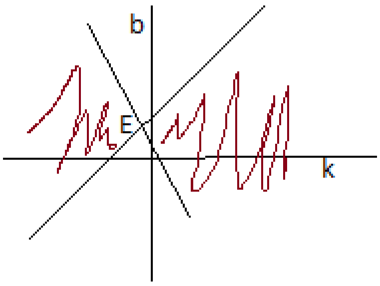


Рис 2

Точка E пересечения прямых $b = k + 2$ и $b = 1 - 2k$ имеет координаты $E\left(-1/3; 5/3\right)$.

Случай 3. Прямая пересекает сторону BC

$$f(x_C, y_C) \cdot f(x_B, y_B) \le 0 \to (-5 + k - b)(1 - 2k - b) \le 0 \quad \text{(***)}$$

На рис 3 изображена область с границей $b = k - 5$ и $b = 1 - 2k$, координаты всех точек которой удовлетворяют неравенству (***).

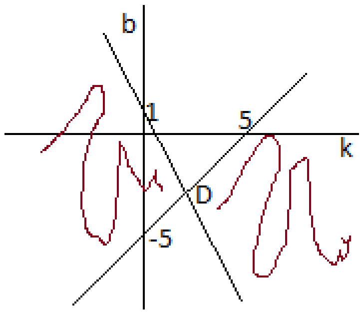


Рис 3

Точка D пересечения прямых $b = k - 5$ и $b = 1 - 2k$ имеет координаты $D(2;-3)$

Объединяя три рисунка, получим искомую картинку:

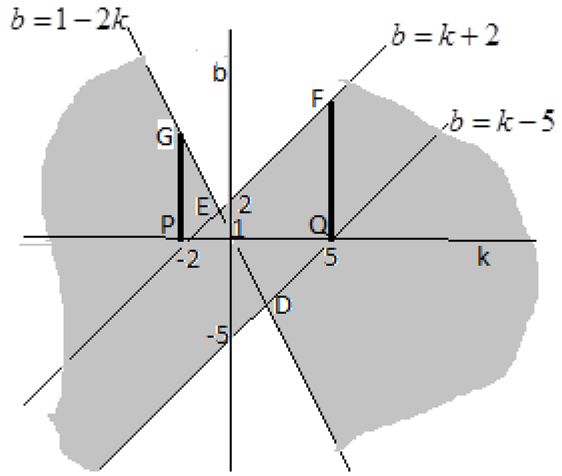


Рис 4

Пересечение области D с полуполосой является объединением треугольников PGE и PFQ.

Площадь $S_{PGE} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3} \cdot 5 = \frac{25}{6}$, площадь $S_{PFQ} = \frac{49}{2}$, складывая их получим ответ.

Ответ для второй части задачи читается с рис 4 для частей прямых $k = C$, не вошедших в D

6. На дуге, равной половине дуги окружности радиуса R, расположены 5 точек, являющихся вершинами выпуклого многоугольника. Найти периметр многоугольника, если известно, что сумма квадратов длин его сторон максимально возможная.

6. Ответ: $p = 2R\left(1 + 4\sin\frac{\pi}{8}\right) = 2R\left(1 + 2\sqrt{2 - \sqrt{2}}\right)$

Решение

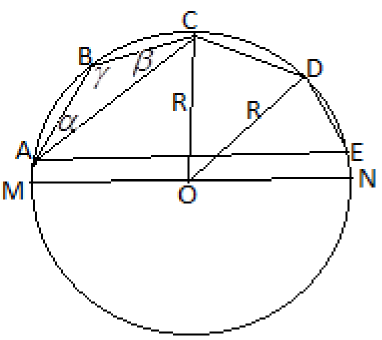


Рис 1

Пусть $ABCDE$ - искомый пятиугольник, $MN-$ диаметр, параллельный AE. Докажем, что $AB=BC=CD=DE$. В треугольнике ABC сумма квадратов длин сторон AB и BC должна быть максимально возможной, при условии, что вершины A, C, D и E фиксированы.

Угол γ при вершине B тупой,

$$AB=2R\sin\beta,\ BC=2R\sin\alpha \to f=AB^2+BC^2=4R^2\left(\sin^2\alpha+\sin^2\beta\right)\to\max$$

при условии $\alpha+\beta=\pi-\gamma$.

$f'_\alpha=4R^2\left(\sin 2\alpha-\sin 2\beta\right)=0\to\alpha=\beta\to\alpha=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\gamma}{2}$ и это точка локального максимума.

Треугольник ABC равнобедренный и $AB=BC$. Аналогично, $BC=CD$ и $CD=DE$.

Для многоугольника с наибольшим периметром сторона $AE=MN$. Тогда $\angle COD=\dfrac{\pi}{4}$,

$CD=2R\sin\dfrac{\pi}{8}$ и периметр многоугольника

$$p=8R\sin\frac{\pi}{8}+2R=2R\left(1+4\sin\frac{\pi}{8}\right)=2R\left(1+2\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)$$