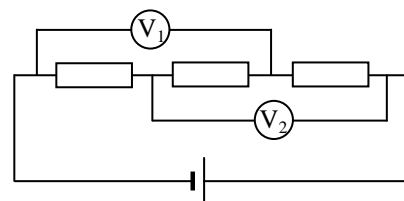


## Решения

### Задач заключительного тура олимпиады «Росатом» 2016-2017 учебного года

#### Физика, 11 класс, комплект 1

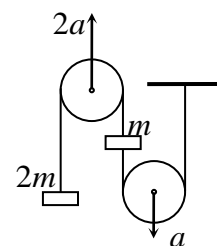
1. В электрической цепи, схема которой представлена на рисунке, три одинаковых резистора соединены последовательно и подключены к батарее с ЭДС  $\varepsilon = 6$  В. Два одинаковых вольтметра, подключенных так, как показано на рисунке, показывают напряжение  $U = 3$  В. Что будет показывать один из них, если второй вообще отключить от цепи? Внутреннее сопротивление источника равно нулю.



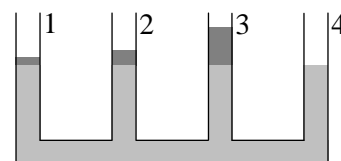
2. В вертикальный цилиндрический сосуд с водой налили воду и закрыли сосуд очень легким подвижным поршнем. Первоначально воздух в сосуде сухой (не содержит паров воды) и имеет плотность  $\rho_0 = 1$  кг/м<sup>3</sup>. Увеличится или уменьшится плотность влажного воздуха в сосуде, когда часть воды испарится? На сколько увеличится или уменьшится плотность влажного воздуха в сосуде по сравнению с плотностью сухого воздуха через достаточно продолжительное время, когда вода перестанет испаряться? Температура воздуха постоянна в течение всего процесса. Давление насыщенных паров при рассматриваемой температуре составляет одну седьмую часть от атмосферного. Средняя молярная масса воздуха  $\mu_0 = 29$  г/моль, молярная масса воды  $\mu_1 = 18$  г/моль. Воздух считать идеальным газом.



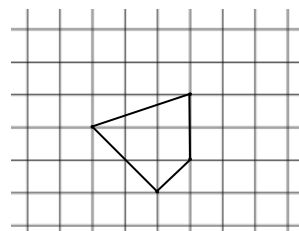
3. В системе двух тел с массами  $m$  и  $2m$ , связанных нерастяжимой и невесомой нитью, второй конец которой прикреплен к потолку, и двух невесомых блоков (см. рисунок), ускорения блоков известны и равны  $a$  и  $2a$  (см. рисунок). Какими силами нужно действовать на блоки?



4. Имеются четыре одинаковых цилиндрических сосуда, в которое налито некоторое количество воды. Поверх воды в первый, второй и третий сосуды (сосуды перенумерованы на рисунке) аккуратно наливают слой масла толщиной соответственно  $h$ ,  $2h$  и  $3h$ . Насколько изменится уровень жидкости в каждом сосуде по сравнению с первоначальным положением после установления равновесия? Известно, что при налипании масла вода ни из одного сосуда полностью маслом не вытесняется. Плотность масла  $\rho_0$ , воды  $\rho_1$  ( $\rho_1 > \rho_0$ ).

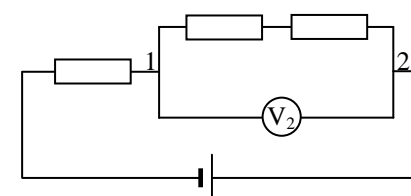
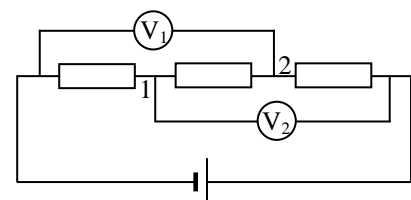


5. На рисунке изображен выпуклый четырехугольник. Где нужно расположить тонкую собирающую линзу, и каким должно быть ее фокусное расстояние, чтобы изображение четырехугольника имело форму квадрата? Решить задачу графически и обосновать все сделанные построения на основе законов геометрической оптики (правильное построение без обоснования и комментариев не будет считаться правильным ответом). Оценить по рисунку фокусное расстояние этой линзы, считая, что одна клеточка на рисунке равна 1 см.



## Решения

1. Очевидно, вольтметры неидеальные, поскольку в случае идеальности они должны были бы показывать  $2/3$  от напряжения источника, а они показывают половину. Кроме того, из данных условия очевидно, что ток через центральное сопротивление не течет. Действительно, поскольку вольтметры  $V_1$  и  $V_2$  показывают половину напряжения источника, то потенциалы точек 1 и 2 одинаковы. Поэтому ток через центральное сопротивление не течет, его можно выбросить, а падения напряжения на резисторах и вольтметрах одинаковы. Поэтому сопротивление вольтметра равно сопротивлению резисторов.



При выбрасывании одного вольтметра цепь принимает

следующий вид (см. рисунок), причем сопротивление участка 1-2 равно  $\frac{2R}{3}$ , поскольку сопротивление вольтметра равно сопротивлению резисторов. Поэтому напряжение на участке 1-2 составляет  $\frac{2}{5}$  от напряжения источника и, следовательно,

$$V_2 = \frac{2}{5} \varepsilon = 2,4 \text{ В}$$

**2.** Поскольку поршень легкий и не закреплен, давление воздуха в сосуде равно атмосферному в течение всего процесса. А поскольку по условию воздух можно считать идеальным газом, то концентрация молекул воздуха не меняется. Это значит, что при испарении воды будет увеличиваться объем воздуха (поршень будет подниматься), и в единице объема воздуха останется то же самое число молекул. А поскольку каждая молекула воды (16 а.е.м.) легче усредненной молекулы воздуха (29 а.е.м.), то масса единицы объема влажного воздуха (т.е. плотность) будет меньше, чем масса единицы объема сухого.

Найдем теперь плотность влажного воздуха. Пусть концентрация молекул воздуха равна  $n$ . Пока он был сухим, это были молекулы собственно воздуха (усредненные), и потому его плотность равна

$$\rho_0 = nm_0 = \frac{n\mu_0}{N_A} \quad (*)$$

где  $m_0$  - масса молекулы воды,  $\mu_0$  - молярная масса воды,  $N_A$  - число Авогадро.

Из условия можно заключить, что нам нужно найти плотность насыщенного пара (поскольку вода перестала испаряться). Это значит, что парциальное давление водяного пара равно давлению насыщенного пара при данной температуре  $p_n$ , а парциальное давление собственно воздуха равно  $p_0 - p_n$ . Поэтому в единице объема воздуха под поршнем находится

$$n_0 = \frac{p_0 - p_n}{p_0} n$$

молекул собственно воздуха (усредненных) и

$$n_1 = \frac{p_n}{p_0} n$$

молекул воды. Отсюда по формулам, аналогичным формуле (\*), можно найти плотность влажного воздуха

$$\rho_1 = n_0 m_0 + n_1 m_1 = \frac{p_0 - p_n}{p_0} \frac{n\mu_0}{N_A} + \frac{p_n}{p_0} \frac{n\mu_1}{N_A} = \frac{n\mu_0}{N_A} - \frac{p_n}{p_0} \frac{n(\mu_0 - \mu_1)}{N_A} = \rho_0 \left( 1 - \frac{p_n}{p_0} \left( 1 - \frac{\mu_1}{\mu_0} \right) \right)$$

Учитывая, что по условию давление насыщенного пара составляет одну седьмую часть от атмосферного давления, получим далее

$$\rho_1 = \rho_0 \left( 1 - \frac{p_n}{p_0} \left( 1 - \frac{\mu_1}{\mu_0} \right) \right) = \frac{\rho_0}{7} \left( 6 + \frac{\mu_1}{\mu_0} \right) = 0,95 \text{ кг/м}^3$$

**3.** Пусть сила натяжения верхней нити (охватывающей блок, движущийся с ускорением  $2a$ , равна  $T_1$ , второй нити -  $T_2$ . Тогда второй закон Ньютона для грузов дает

$$2ma_1 = T_1 - 2mg$$

$$ma_2 = T_1 - T_2 - mg$$

Найдем связь ускорений грузов с ускорением блоков. Пусть нижний блок опустился на  $\Delta l$ . Тогда верхний блок поднимется на  $2\Delta l$  (его ускорение в два раза больше). Очевидно, что тело массой  $m$  переместится на  $2\Delta l$ , тело массой  $2m$  поднимется на  $6\Delta l$ . Поэтому ускорение тела  $m$  равно  $2a$  и направлено вниз, тела  $2m$  -  $6a$  и направлено вверх. Поэтому система уравнений (\*) принимает вид

$$12ma = T_1 - 2mg$$

$$2ma = T_2 + mg - T_1$$

Отсюда

$$T_1 = 12ma + 2mg$$

$$T_2 = 14ma + mg$$

Ну а поскольку блоки невесомы, то силы, которым нужно действовать на блоки, равны удвоенным силам натяжения нитей:

$$F_1 = 2T_1 = 24ma + 4mg, \quad F_2 = 2T_2 = 28ma + 2mg$$

4. С точки зрения давления в жидкости наливание в сосуд слоя масла толщиной  $h$  эквивалентно наливанию слоя воды толщиной

$$\frac{\rho_0 h}{\rho_1}.$$

Поэтому наливание в систему сосудов слоя масла толщиной  $6h$  (в первый, второй и третий сосуды) эквивалентно тому, что мы нальем слой воды толщиной

$$h_1 = \frac{6\rho_0 h}{\rho_1}$$

Но если бы мы налили такое количество воды, она распределилась бы равномерно по четырем сосудам. Учитывая, что в четвертом сосуде будет только вода (по условию масло полностью воду ни из одного сосуда не вытесняет и, следовательно, не может попасть в четвертый сосуд), то уровень воды в нем поднимется на величину

$$\Delta h_4 = \frac{6\rho_0 h}{4\rho_1} = \frac{3\rho_0 h}{2\rho_1}.$$

При этом давление в жидкости (около дна сосуда) возрастет на величину

$$\Delta p = \rho_1 g h_4 = \frac{3}{2} \rho_0 g h \quad (*)$$

Изменение уровня жидкости в первом, втором и правом сосудах найдем из условия увеличения давления в этих сосудах на эту величину.

В первом сосуде находится слой масла толщиной  $h$ , который обеспечивает дополнительное давление  $\rho_0 g h$ . Поэтому для увеличения давления на  $(3/2)\rho_0 g h$  в левый сосуд должна войти дополнительная вода, дающая давление около дна сосуда  $(1/2)\rho_0 g h$ , т.е. слой воды толщиной  $(1/2)(\rho_0 / \rho_1)h$ . Это значит, что уровень жидкости в первом сосуде увеличится на величину

$$\Delta h_1 = h + \frac{\rho_0}{2\rho_1} h = h \left( 1 + \frac{\rho_0}{2\rho_1} \right)$$

Во втором сосуде появится дополнительный слой масла толщиной  $2h$ , который обеспечивает дополнительное давление

$$2\rho_0 g h$$

Поэтому чтобы давление около дна второго сосуда возросло на величину  $\Delta p$  (\*) из второго сосуда должна уйти вода толщиной  $(1/2)(\rho_0 / \rho_1)h$ . Поэтому уровень воды во втором сосуде поднимется на величину

$$\Delta h_2 = 2h - \frac{\rho_0}{2\rho_1} h = 2h \left( 1 - \frac{\rho_0}{4\rho_1} \right)$$

В третьем сосуде появится дополнительный слой масла толщиной  $3h$ , который обеспечивает дополнительное давление

$$3\rho_0 g h$$

Поэтому чтобы давление около дна третьего сосуда возросло на величину  $\Delta p$  (\*) из третьего сосуда должна уйти вода толщиной  $(3/2)(\rho_0 / \rho_1)h$ . Поэтому уровень воды в третьем сосуде поднимется на величину

$$\Delta h_3 = 3h - \frac{3\rho_0}{2\rho_1} h = 3h \left( 1 - \frac{\rho_0}{2\rho_1} \right)$$

(проверка: сумма подъемов уровней жидкости во всех сосудах должна дать то, что налили, т.е.  $4h$ .)

$$\Delta h_1 + \Delta h_2 + \Delta h_3 + \Delta h_4 = h + \frac{\rho_0}{2\rho_1}h + 2h - \frac{\rho_0}{2\rho_1}h + 3h - \frac{3\rho_0}{2\rho_1}h + \frac{3\rho_0}{2\rho_1}h = 6h$$

как и должно быть)

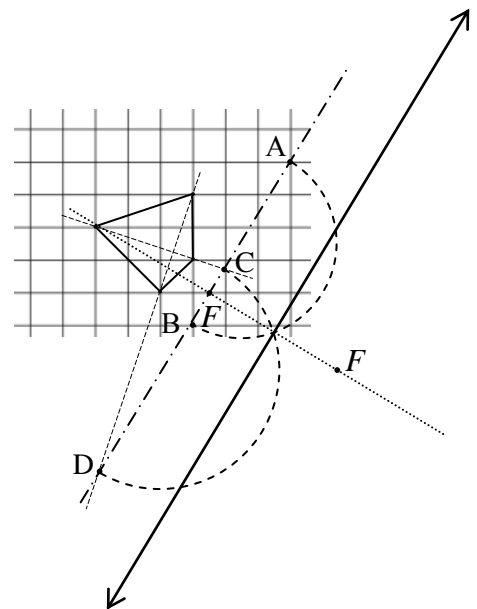
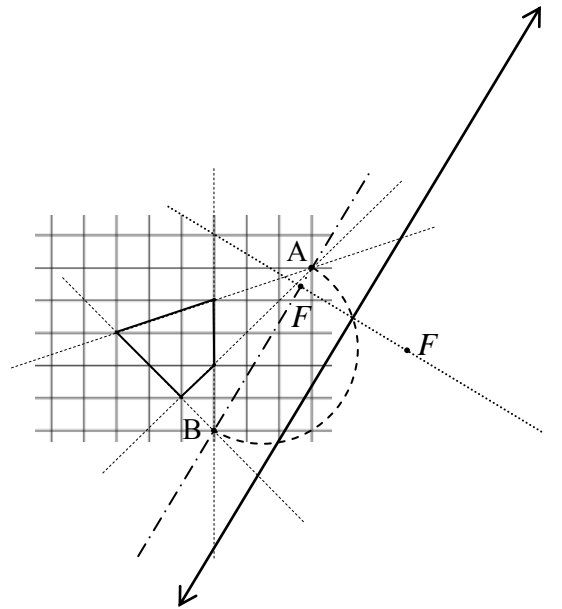
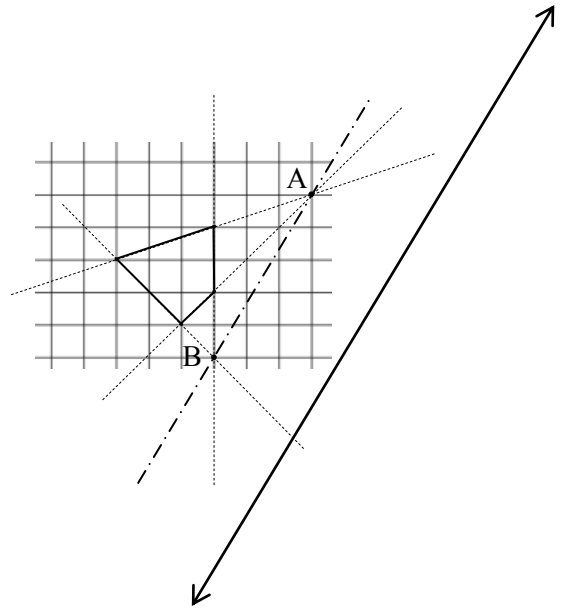
**Решение.** Очевидно, изображение четырехугольника будет квадратом, если: (1) изображения противоположных сторон будут параллельны, (2) угол между изображениями пар противоположных сторон будет равен  $90^\circ$ , (3) угол между изображениями диагоналей четырехугольника также будет равен  $90^\circ$ . Установим, в каких случаях условия (1), (2) и (3) выполняются.

(1) Пусть есть тонкая собирающая линза и два непараллельных отрезка. Построим их изображения и поймем, когда их изображения будут параллельными.

Для построения изображений отрезков возьмем лучи, идущие вдоль самих отрезков. Тогда каждый из таких лучей проходит и через один конец отрезка, и через другой, и, следовательно, изображение отрезков будет лежать на этих лучах после их прохождения линзы (такие лучи показаны на рисунке пунктиром). Но чтобы два луча после прохождения собирающей линзы были параллельны, до линзы они должны пересекаться в ее фокальной плоскости. Это значит, что точки  $x$  пересечения ( $A$  и  $B$  на рисунке) принадлежат фокальной плоскости линзы (показана штрихпунктирной линией), а сама линза лежит справа от прямой  $AB$  (в качестве примера показано одно из возможных расположений линзы, причем ее фокусное расстояние должно равняться расстоянию от линзы до прямой  $AB$ ).

Итак, после прохождения линзы, показанной на рисунке, изображение четырехугольника будет параллелограммом. Установим теперь, когда это изображение будет прямоугольником. Очевидно, оно будет прямоугольником тогда, когда лучи, вышедшие из точек  $A$  и  $B$ , и проходящие через центр линзы, будут перпендикулярны друг другу. Действительно, эти лучи не преломляются, все остальные лучи, проходящие через точки  $A$  и  $B$ , после прохождения линзы будут им параллельны. Поэтому центр линзы может лежать в любой точке, принадлежащей полуокружности, проходящей через точки  $A$  и  $B$  (см. рисунок; полуокружность показана пунктиром, а главная оптическая ось линзы – точечной линией; отмечены также ее фокусы).

Итак, изображение четырехугольника в линзе, приведенной на последнем рисунке будет прямоугольником, причем таких положений линз еще будет очень много (ее центр может располагаться в любой точке пунктирной окружности на последнем рисунке). Можно ли подобрать ее такое расположение, чтобы изображение четырехугольника было бы квадратом? Для этого надо, чтобы изображение диагоналей четырехугольника были перпендикулярны друг другу. А для этого надо, чтобы угол между вышедшими из точек  $C$  и  $D$  и проходящими через центр линзы был прямым. Для этого центр линзы должен лежать на полуокружности,



проходящей через точки С и D.

Поскольку все построения проводились в правильном масштабе, рисунок можно использовать для оценки фокусного расстояния линзы. Из рисунка находим, что расстояние от линзы до ее фокальной плоскости составляет около двух диагоналей одной клетки, т.е. равно

$$F \approx 3 \text{ см}$$