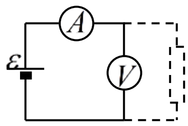
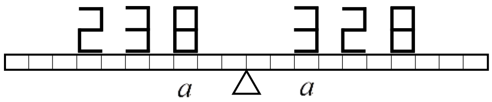
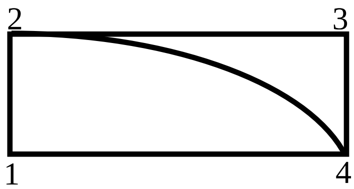
Решения
Заключительный тур олимпиады Росатом,
физика, 10 класс
2017-2018 учебный год



1. К батарее с ЭДС ε и неизвестным внутренним сопротивлением подключены последовательно амперметр и вольтметр с некоторыми неизвестными внутренними сопротивлениями. Если параллельно вольтметру включить некоторое сопротивление, то показания амперметра увеличатся в 2 раза, вольтметра в 2 раза уменьшатся. Найти показания вольтметра до включения в цепь сопротивления.

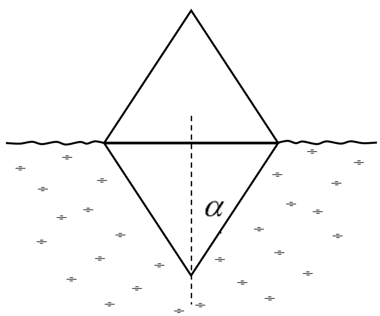


2. Из 34 одинаковых стержней длиной a и массой m изготовлены макеты двух чисел 238 и 328 (каждое «звено» каждой цифры – один стержень). Макеты чисел расположили на коромысле равноплечих весов длиной $20a$ так, как это показано на рисунке. Какое из чисел перевесит и почему? Какой дополнительный груз нужно расположить на конце второго коромысла весов, чтобы восстановить равновесие?



3. Имеется прямоугольник 1234 изготовленный из металлических стержней одинакового материала и одинакового сечения, причем длины сторон прямоугольника относятся как 1-2:1-4=1:2. Вершины 2 и 4 связаны таким же (но кривым) стержнем с длиной, втрое большей длины стержня 1-2. Температуры вершин 1 и 3 поддерживается постоянными и равными $t_1 = 100°$ C, $t_3 = 0°$ C. Найти температуры вершин 2 и 4? **Указание.** Тепловой поток между точками, температуры которых поддерживаются постоянными, пропорционален разности температур точек, обратно пропорционален расстоянию между ними и коэффициенту теплопроводности среды между ними (закон Фурье). Считать, что боковые поверхности стержней теплоизолированы.

4. Минутная стрелка часов в 2 раза длиннее часовой. В некоторый момент времени стрелки совпали. Через какое время после этого конец часовой стрелки будет удаляться от конца минутной с максимальной скоростью?



5. Буй составлен из двух одинаковых металлических конусов с высотой $h = 1$ м и углом при вершине ($\alpha = 20°$; см. рисунок). Буй плавает в воде в вертикальном положении, погрузившись в воду до половины. Через щели внутрь буя просачивается вода, выходит воздух, и буй медленно погружается в воду. Будет ли меняться разность уровней воды внутри и снаружи буя в процессе его погружения в воду? Найти разность уровней воды внутри и снаружи буя, в тот момент времени, когда она будет минимальной. Толщиной стенок буя пренебречь. **Указание.** Объем прямого кругового конуса определяется соотношением $V = (1/3)\pi R^2 h$, где R - радиус основания конуса, h - его высота.

Решения

1. По закону Ома для замкнутой цепи имеем (в случае цепи без дополнительного сопротивления) находим ток в цепи (который равен току через амперметр)

$$I = \frac{\varepsilon}{r + r_A + r_V}$$

где r - внутреннее сопротивление источника, r_A - сопротивление амперметра, r_V - сопротивление вольтметра. Отсюда находим напряжение на вольтметре

$$U_V = Ir_V = \frac{\varepsilon r_V}{r + r_A + r_V} = \varepsilon - I\left(r + r_A\right) \qquad (*)$$

Аналогично находим, что когда параллельно вольтметру подключают сопротивление R, напряжение на вольтметре будет равно

$$U_V' = \varepsilon - I'\left(r + r_A\right)$$

Но по условию показания амперметра увеличиваются вдвое ($I' = 2I$), а вольтметра вдвое уменьшаются ($U_V' = U_V / 2$). Отсюда

$$\frac{U_V}{2} = \varepsilon - 2I\left(r + r_A\right) \qquad (**)$$

Выражая теперь величину $I\left(r + r_A\right)$ из формулы (*) и подставляя ее в формулу (**), получим

$\frac{U_V}{2} = \varepsilon - 2\left(\varepsilon - U_V\right)$

Или

$$U_V = \frac{2}{3}\varepsilon$$

2. Конечно, массы макетов чисел 238 и 328 равны, но при их сравнении на коромысельных весах сравниваются не силы тяжести, действующие на макеты чисел, а моменты сил тяжести относительно опоры. Посчитаем моменты сил, действующих на правое и левое плечо коромысла. «Двойка» (слева) и «восьмерка» (справа). У «восьмерки» есть два лишних стержня, расположенных на расстояниях $6a$ и $7a$ относительно опоры. Значит, для избыточного момента, действующего на правое плечо, имеем $\Delta M_{пр} = 6amg + 7amg = 13amg$. «Тройка» (слева) и «двойка» (справа). У «двойки» есть лишний стержень на расстоянии $5a$ от опоры, и не хватает стержня на расстоянии $4a$ от опоры. Следовательно, избыточный момент, действующий на правое плечо коромысла весов, есть $\Delta M_{пр} = 13amg + 5amg - 4amg = 14amg$. «Восьмерка» (слева) и «тройка» справа. У восьмерки есть 2 лишних стержня на расстоянии $2a$ от опоры. Поэтому для избыточного момента, действующего на правое плечо, имеем

$$\Delta M_{пр} = 14amg - 4amg = 10amg$$

Следовательно, число 328 справа от опоры перевесит. Поскольку восстанавливающий равновесие весов груз нужно положить на самый конец левого колена коромысла (плечо $10a$) для его массы m_0 имеем

$$10am_0g = 10amg$$

Откуда находим

$$m_0 = m$$

3. Очевидно, что в равновесии (когда все температуры не меняются) тепловой поток по стержню 1-2 равен сумме тепловых потоков по стержням 2-3 и 2-4. Поэтому из закона Фурье имеем

$$\frac{t_1 - t_2}{l} = \frac{t_2 - t_3}{2l} + \frac{t_2 - t_4}{3l}$$

где l - длина стержня 1-2. Отсюда

$$6t_1 + 3t_3 = 11t_2 - 2t_4 \qquad (*)$$

Аналогично, тепловой поток по стержню 4-3 равен сумме тепловых потоков по стержням 2-4 и 1-4. Поэтому

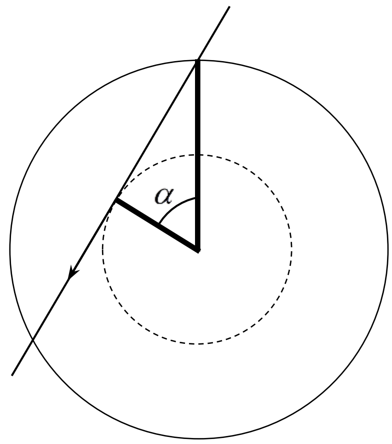
$$\frac{t_4 - t_3}{l} = \frac{t_1 - t_4}{2l} + \frac{t_2 - t_4}{3l}$$

Откуда

$$3t_1 + 6t_3 = -2t_2 + 11t_4 \qquad (**)$$

Решая систему уравнений (*)-(**), получим

$$t_2 = \frac{72t_1 + 45t_3}{117} = 61,5^\circ \text{ C}, \; t_4 = \frac{45t_1 + 72t_3}{117} = 38,5^\circ \text{ C}$$

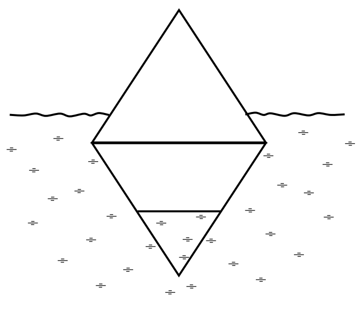


4. Скорость удаления конца часовой стрелки от конца часовой стрелки определяется тем, как растет расстояние между концами стрелок и потому не зависит от системы отсчета, в которой рассматривается их движение. Перейдем в систему отсчета, в которой минутная стрелка не вращается. В ней часовая стрелка вращается против часовой стрелки с постоянной угловой скоростью $\omega_{мин} - \omega_{час}$, где $\omega_{мин}$ и $\omega_{час}$ - угловые скорости минутной и часовой стрелок, и, следовательно, ее конец движется с постоянной по величине скоростью. Поэтому скорость удаления конца часовой стрелки от конца минутной будет максимальной тогда, когда вектор скорости часовой стрелки направлен вдоль прямой, соединяющей концы стрелок (см. рисунок). Поэтому в этот момент прямая, проведенная из конца минутной стрелки к концу часовой является касательной к окружности, по которой движется конец часовой стрелки. А поскольку длина часовой стрелки вдвое меньше длины минутной, угол между стрелками составляет $\alpha = 60^\circ$. А поскольку этот угол составляет шестую часть полного угла, то стрелка пройдет его за шестую часть времени, за которое она совершает полный оборот вокруг минутной стрелки, которое в свою очередь равно

$$T = \frac{2\pi}{\omega_{мин} - \omega_{час}} = \frac{60 \cdot 12}{11} = 65,5 \text{ мин}$$

Поэтому скорость удаления конца часовой стрелки от конца минутной будет максимальной через 1/6 часть этого времени, т.е. через

$$\Delta t = \frac{2\pi / 6}{\omega_{мин} - \omega_{час}} = \frac{60 \cdot 12}{11 \cdot 6} = 10,9 \text{ мин}$$



5. Пусть в буй просочилась вода, и он погрузился на некоторую глубину (см. рисунок). Рассмотрим условие равновесия буя. В равновесии сила тяжести равна силе Архимеда. Поэтому

$$(M + m)g = \rho g V_{п.ч.}$$

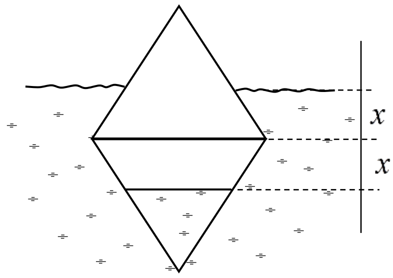
где M - масса буя, m - масса воды в буе, ρ - плотность воды, $V_{п.ч.}$ - объем погруженной в воду части буя. С другой стороны, объем погруженной в воду части буя складывается из (стенки буя считаем тонкими) объема его погруженной части, заполненной водой $V_{п.ч.с.в.}$, и объема его погруженной части без воды $V_{п.ч.б.в.}$. Поэтому

$$(M + m)g = \rho g \left(V_{п.ч.с.в.} + V_{п.ч.б.в.}\right)$$

Но в пренебрежении толщиной стенок, очевидно, $m = \rho V_{п.ч.с.в.}$. Поэтому условие равновесия буя дает

$$M = \rho V_{п.ч.б.в.}$$

Из этой формулы следует, что объем его подводной части, не заполненный водой, определяется только массой самого буя, т.е. не меняется в процессе его погружения в воду из-за наполнения водой. А поскольку ширина центральной части буя больше ширины его концов, то расстояние между уровнем воды внутри буя и уровнем воды в водоеме будет максимальным, когда максимальна ширина части буя, расположенной между этими уровнями. Т.е. это расстояние будет минимально, если расстояния от середины буя до уровня воды внутри буя и уровня воды в водоеме будут одинаковы (см. рисунок, эти расстояния обозначены как x). Найдем эти расстояния.



Из условия равновесия буя без воды (учитывая, что он погружается в воду ровно наполовину) имеем

$$M = \rho V_{п.ч.б.в.} = \rho \frac{1}{3}\pi R^2 h = \rho \frac{1}{3}\pi h^3 \operatorname{tg}^2\alpha$$

где R - радиус самой широкой части буя. Если буй заполнен водой слоем высотой h_1, то объем незаполненной водой части буя от его средней части до уровня воды внутри буя будет равен

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(h^3 - h_1^3\right)\operatorname{tg}^2\alpha \qquad (*)$$

Поскольку в случае минимального расстояния между уровнями воды внутри буя и в водоеме расстояния от средней части буя до уровней воды внутри буя и в водоеме одинаковы, объем незаполненной водой подводной части буя равен удвоенному объему (*) и равен объему половины буя. Поэтому

$$\frac{2}{3}\pi\left(h^3 - h_1^3\right)\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{3}\pi h^3 \operatorname{tg}^2\alpha$$

Отсюда находим

$$h_1 = \frac{h}{\sqrt[3]{2}} \qquad \Rightarrow \qquad x = h - h_1 = \frac{h\left(\sqrt[3]{2} - 1\right)}{\sqrt[3]{2}}$$

А минимальное расстояние между уровнями воды внутри буя и в водоеме равно

$$\Delta h_{\min} = 2\left(h - h_1\right) = \frac{2h\left(\sqrt[3]{2} - 1\right)}{\sqrt[3]{2}} = 0,41h = 0,41 \text{ м}$$

От угла при вершине буя ответ не зависит. Поэтому во всех вариантах ответ такой же.