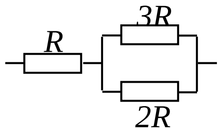
Задания очного отборочного тура
Отраслевой физико-математической олимпиады школьников «Росатом»
Физика, 11 класс, комплект 1
2017 г.



1. К цепи, схема которой представлена на рисунке, приложено электрическое напряжение. Известно, что мощность, выделяемая на сопротивлении R, равна P. Какая мощность выделяется на сопротивлении $2R$? Величины всех сопротивлений даны на рисунке.

Решение. Из закона Джоуля-Ленца находим ток, текущий через сопротивление R

$$I = \sqrt{\frac{P}{R}}$$

Далее этот ток на участке параллельного соединения делится в отношении 2:3 (2 – через резистор $3R$, 3 – через резистор $2R$). Поэтому

$$I_{2R} = \frac{3}{5}I, \qquad I_{3R} = \frac{2}{5}I$$

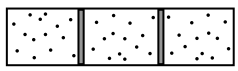
Отсюда находим мощность, выделяемую на сопротивлении $2R$

$$P_{2R} = I_{2R}^2 2R = \frac{18}{25}P$$

Критерии оценки задачи

1. Использованы законы Ома и Джоуля-Ленца – 0,5 балла
2. Найдены токи во всех элементах цепи – 0,5 балла
3. Ток выражен через мощность, выделяемую на сопротивлении R – 0,5 балла
4. Правильно найдена мощность, выделяемая на сопротивлении $2R$ – 0,5 балла

Максимальная оценка за задачу – 2 балла



2. В цилиндрическом сосуде длиной l находятся 2 подвижных теплонепроницаемых поршня, делящих сосуд на 3 отсека. Первоначально температура газа во всех отсеках была равна T, объемы отсеков одинаковы. Затем температуру газа в среднем и левом отсеках увеличивают вдвое, температуру газа в правом отсеке поддерживают равной T. На сколько сместится при этом левый поршень?

Решение. Поскольку поршни подвижны, условие их равновесия заключается равенство давлений газов в каждом отсеке сосуда. Поэтому из условия равновесия поршней в начальном состоянии и закона Клапейрона-Менделеева заключаем, что количество вещества газа в каждом отсеке одинаково.

При нагревании газов в среднем и левом отсеке, увеличатся их давления, и поршни переместятся вправо. Поскольку после нагревания температуры газа в среднем и левом отсеках будут одинаковы, одинаковыми должны быть и объемы этих отсеков. Поэтому если правый поршень сместился вправо на величину Δx, то левый сместится на $\Delta x/2$. При этом увеличение объемов среднего и левого отсеков будет равно $\Delta V = S\Delta x/2$, а уменьшение объема правого отсека - $\Delta V = S\Delta x$. Поэтому закон Клапейрона-Менделеева для газа в среднем или левом и правом отсеках при условии равенства давлений газа в них дает

$$\begin{aligned} &p\left(\frac{l}{3}S + \frac{\Delta x}{2}S\right) = \nu R2T \\ &p\left(\frac{l}{3}S - \Delta x S\right) = \nu RT \end{aligned} \qquad (1)$$

где p - давление газа в отсеках в конечном состоянии, ν - количество вещества газа в отсеках. Деля уравнения (1) друг на друга и решая уравнение относительно Δx, получим

$$\Delta x = \frac{2}{15}l$$

И, следовательно, смещение левого поршня равно

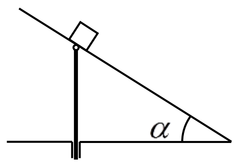
$$\Delta x_{лев} = \frac{1}{15}l$$

Критерии оценки задачи

1. использовано правильное условие равновесия – равенство давлений справа и слева от поршней – 0,5 балла
2. понято, что смещение моршней отличается вдвое – 0,5 балла
3. правильно использован закон Клапейрона-Менделеева для газов в отсеках – 0,5 балла
4. получены правильные ответы – 0,5 балла

Максимальная оценка за задачу – 2 балла

3. Тело начинает соскальзывать по наклонной плоскости из точки, расположенной над вертикальным упором (см. рисунок). Коэффициент трения между телом и плоскостью μ. При каком угле наклона плоскости α время соскальзывания будет минимальным?



Решение. Пусть расстояние от основания плоскости до упора равно x. Тогда длина плоскости (от шарнира до основания) равна $x/\cos\alpha$. Ускорение тела при движении по плоскости равно

$$a = g\left(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\right)$$

Тогда квадрат времени соскальзывания тела с наклонной плоскости будет равен

$$t^2 = \frac{2x}{g\left(\cos\alpha\sin\alpha - \mu\cos^2\alpha\right)} \qquad (2)$$

Величина (2) минимальна, когда максимален знаменатель формулы (2). Дифференцируя его по α, получим

$$-\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\mu\cos\alpha\sin\alpha = 0$$

Отсюда находим угол, для которого время соскальзывания тела минимально

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{arcctg}\left(\mu\right) = \operatorname{arctg}\left(\mu + \sqrt{1+\mu^2}\right)$$

Критерии оценки задачи

1. Найдено правильное ускорение – 0,5 балла

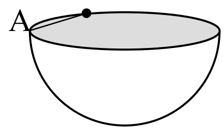
2. найдено правильное время движения – 0,5 балла

3. ищется минимум этого выражения (любым способом) – 0,5 балла

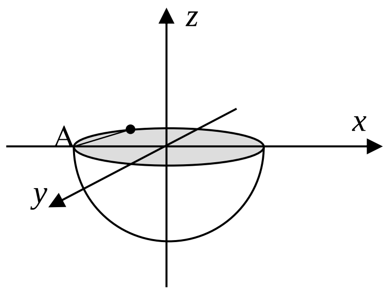
4. получен правильный ответ – 0,5 балла

Максимальная оценка за задачу – 2 балла

4. На краю полусферической чаши радиуса R закреплена невесомая нить длиной $R/2$ (в точке А), ко второму концу которой прикреплено маленькое тело. Тело удерживают на краю ямы так, что нить натянута (см. рисунок). В некоторый момент времени тело отпускают. Найти скорость и ускорение тела в тот момент, когда оно будет проходить нижнюю точку своей траектории.



Решение. Докажем, что тело движется в вертикальной плоскости. С одной стороны, оно находится на поверхности сферы радиуса R, и, следовательно, его координаты связаны соотношением (уравнением сферы; оси координат показаны на рисунке):



$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \qquad (3)$$

С другой стороны, тело в любой момент времени находится на расстоянии $R/2$ от точки А. Поэтому ее координаты должны также принадлежать сфере с радиусом $R/2$ и центром в точке А (x-координата которой в нашей системе координат равна $x = -R$):

$$\left(x+R\right)^2 + y^2 + z^2 = \left(R/2\right)^2 \qquad (4)$$

Вычитая формулу (4) из формулы (3), получим

$$x = -\frac{7R}{8}$$

Это означает, что тело движется так, что его x-координата остается постоянной, т.е. тело движется в плоскости, перпендикулярной оси x. А поскольку сечение сферы любой плоскостью есть окружность, то тело движется в вертикальной плоскости по окружности. Радиус этой окружности найдем по теореме Пифагора

$$r = \sqrt{R^2 - \left(7R/8\right)^2} = \frac{\sqrt{15}R}{8}$$

Ускорение тела в нижней точке траектории направлено к центру окружности (т.е. вертикально вверх) и равно v^2/r, где v - скорость тела, r - радиус окружности. Скорость тела в нижней точке траектории найдем по закону сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} = mg\frac{\sqrt{15}R}{8} \qquad \Rightarrow \qquad v^2 = \frac{\sqrt{15}gR}{4}$$

Отсюда находим ускорение тела

$$a = \frac{v^2}{r} = 2g$$

Критерии оценки задачи

1. доказано, что траектория движения тела – окружность, лежащая в вертикальной плоскости – 0,5 балла

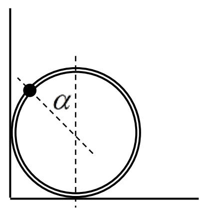
2. найден радиус этой окружности и использован закон сохранения энергии для нахождения скорости – 0,5 балла

3. получена правильная формула для скорости – 0,5 балла

4. получена правильная формула для ускорения – 0,5 балла

Максимальная оценка за задачу – 2 балла

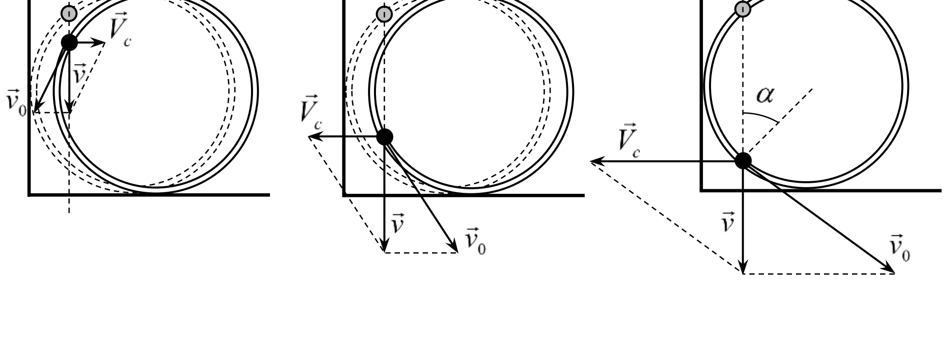
5. Очень легкий обруч радиуса R удерживают на гладкой горизонтальной поверхности около вертикальной стены. К обручу прикреплено массивное тело, которое расположено так, как показано на рисунке ($\alpha = 45°$). Обруч отпускают. достигнет ли тело горизонтальной поверхности, и если да, то на каком расстоянии от стены? Масса обруча много меньше массы тела, трение отсутствует.



Решение. Рассмотрим сначала движение обруча. Когда он не касается боковой стенки, на него действуют только сила реакции пола (которая является вертикальной из-за отсутствия трения) и сила со стороны тела. Но поскольку масса обруча равна нулю, сумма этих сил и сумма их моментов относительно любой точки должна быть равна нулю. Этого можно добиться только, если обе силы реакции нулевые (в противном случае момент силы реакции пола относительно тела был бы не равен нулю и, следовательно, сообщал обручу бесконечное угловое ускорение). Поэтому обруч не действует на тело, и, следовательно, тело падает вертикально вниз с ускорением свободного падения и «заставляет» двигаться обруч бесконечно малой силой.

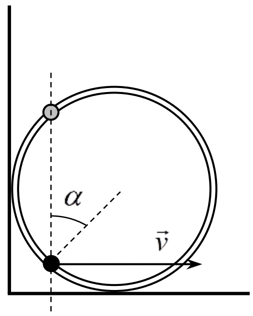
Найдем теперь, как движется обруч. Рассмотрим сначала участок траектории тела от его начальной точки до середины обруча. С одной стороны, его скорость $\vec{v}$ направлена вертикально вниз, с другой, складывается из скорости центра обруча $\vec{V}_c$ (которая направлена горизонтально) и его скорости относительно центра $\vec{v}_0$ (которая направлена по касательной к обручу против часовой стрелки):

$$\vec{v} = \vec{V}_c + \vec{v}_0 \qquad (5)$$



Треугольник сложения скоростей, отвечающий формуле (5) до того, как тело прошло середину обруча, показан на левом рисунке, когда пройдет – на среднем. Из этих рисунков видно, что до того, как тело пройдет середину обруча, обруч движется направо, после этого - налево (на этих рисунках первоначальное положение обруча и тела показано пунктиром и прозрачным кружком соответственно). При этом, когда тело дойдет до точки, расположенной ниже середины обруча и в которой угол между радиусом и вертикалью равен $\alpha = 45°$, обруч вернется в свое первоначальное положение около стенки (правый рисунок). А поскольку в этом положении обруч движется налево (и еще вращается против часовой стрелки) произойдет его столкновение со стенкой.

В этот момент возникнет сила реакции со стороны стенки, момент которой относительно тела не равен нулю. Поэтому эта сила «закрутит» обруч относительно тела, и возникнет сила реакции со стороны пола, причем ее величина будет в любой момент времени равна силе реакции стенки. Поэтому импульсы этих сил за время взаимодействия будут одинаковы. А поскольку тело не может опускаться дальше «в угол», находясь между стенкой и потолком, его вертикальная скорость погасится, и возникнет точно такая же скорость, направленная горизонтально. В этот момент тело отскочит от стенки, имея ту же по величине горизонтальную скорость, какую оно имело до столкновения обруча со стенкой в вертикальном направлении. В этот же момент пропадут обе силы реакции, и тело снова будет двигаться с ускорением свободного падения. Т.е. фактически после того, как обруч отскочит от стенки, тело будет двигаться «под углом к горизонту» с горизонтальной начальной скоростью.



Найдем скорость тела v в этот момент. Скорость v находится по законам равноускоренного движения (или закону сохранения энергии). Поскольку тело спустится на величину $\sqrt{2}R$ его скорость будет равна

$$v = \sqrt{2\sqrt{2}gR}$$

Вернемся теперь к движению тела. Поскольку сразу после удара тело находится на высоте $R - R/\sqrt{2}$, а скорость направлена горизонтально, а ускорение равно g, то тело коснется земли через интервал времени

$$t = \sqrt{\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)R}{g}}$$

И следовательно, пролетит по горизонтали расстояние

$$S = vt = \sqrt{2\sqrt{2}gR}\sqrt{\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)R}{g}} = 2R\sqrt{\sqrt{2}-1}$$

Чтобы найти расстояние от тела до стенки в этот момент к расстоянию S нужно прибавить расстояние от тела до стенки в тот момент, когда обруч сталкивался со стенкой, т.е. $R - R/\sqrt{2}$. Поэтому расстояние от тела до стенки в тот момент, когда оно коснется пола, равно

$$x = S + \frac{\left(\sqrt{2}-1\right)}{\sqrt{2}}R = R\left(2\sqrt{\sqrt{2}-1} + \frac{\left(\sqrt{2}-1\right)}{\sqrt{2}}\right)$$

Критерии оценки задачи

1. понята основная идея решения задачи – тело движется вертикально вниз с ускорением g , а кольцо – сначала от стены, потом к стене - 0,5 балла

2. использован закон сохранения энергии для вертикального движения тела, найдена его скорость в тот момент, когда кольцо стукнется о вертикальную стенку – 0,5 балла

3. Доказано, что в момент удара вертикальная скорость пропадет, а появится точно такая же горизонтальная – 0,5 балла

4. Использованы законы равноускоренного движения для движения тела, получен правильный ответ – 0,5 балла

Максимальная оценка за задачу – 2 балла