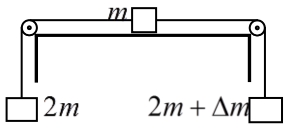
Задания очного отборочного тура
Отраслевой физико-математической олимпиады школьников «Росатом»
Физика, 11 класс, комплект 2
2017 г.

1. На столе находится тело массой m, к которому с помощью веревок привязаны тела с массой $2m$ и $2m+\Delta m$. Веревки переброшены через блоки, укрепленные на краях стола (см. рисунок). Коэффициент трения между верхним телом и столом - k. Каким будет ускорение верхнего тела, если значение массы Δm вдвое превосходит то ее минимальное значение, при котором верхнее тело сдвигается с места?



Решение. Найдем сначала значение массы Δm, при котором верхнее тело сдвигается с места. При нулевом ускорении на него направо действует сила $(2m+\Delta m)g$, налево $2mg$. Поэтому оно сдвигается, если

$$(2m+\Delta m)g-2mg \ge kmg \qquad \Rightarrow \qquad \Delta m \ge km \tag{1}$$

Если масса Δm вдвое превосходит значение (1), второй закон Ньютона для всех тел имеет вид

$$\begin{aligned} &(2m+2\Delta m)g-T_1=(2m+2\Delta m)a \\ &T_1-T_2-kmg=ma \\ &T_2-2mg=2ma \end{aligned} \tag{2}$$

где T_1 - сила натяжения правой нити, T_2 - левой. Складывая уравнения (2), получим

$$a=\frac{kg}{5+2k}$$

Критерии оценки задачи

1. Найдено Δm, при котором верхнее тело сдвигается с места – 0,5 балла
2. записан второй закон Ньютона для всех тел – 0,5 балла
3. правильно записан второй закон Ньютона в случае, когда масса Δm вдвое превосходит то ее минимальное значение, при котором верхнее тело сдвигается с места – 0,5 балла
4. Найдено правильное ускорение тел – 0,5 балла

Максимальная оценка за задачу – 2 балла

2. Тело движется вдоль оси x со скоростью, пропорциональной кубу расстояния до начала координат $v=\alpha x^3$, где α - некоторое число. Известно, что в точке с координатой $x_0=1$ м скорость тела равнялась $v_0=2$ м/с. Найти ускорение тела в этой точке.

Решение. Продифференцируем заданную функцию по времени

$$a=\frac{dv}{dt}=\alpha 3x^2\frac{dx}{dt}=3\alpha x^2 v$$

По заданным значениям x_0 и v_0 найдем коэффициент α: $\alpha=v_0/x_0^3$. Отсюда находим ускорение в точке с координатой x_0:

$$a_0 = 3\frac{v_0^2}{x_0} = 24 \text{ м/с}^2$$

Критерии оценки задачи

1. понято, что нужно по заданной скорости найти ускорение (через производную)– 0,5 балла

2. использованы формулы дифференцирования сложной функции – 0,5 балла

3. получен правильный ответ – 1 балл

Максимальная оценка за задачу – 2 балла

3. Два конденсатора с емкостью C и $2C$ соединили последовательно. Эту батарею конденсаторов зарядили от источника электрического напряжения U, а затем отсоединили от него. Каким будет напряжение на батарее, если конденсатор емкостью C опустить в жидкий диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ε?

Решение. При последовательном соединении конденсаторов их заряд будет одинаковым и равным

$$Q = UC_{об}$$

где $C_{об}$ - общая емкость системы конденсаторов. Находя общую емкость последовательно соединенных конденсаторов

$$C_{об} = \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{2C}\right)^{-1} = \frac{2C}{3}$$

получим

$$Q = \frac{2CU}{3}$$

Поэтому на каждом из них будет следующее электрическое напряжение

$$U_C = \frac{Q}{C} = \frac{2U}{3}, \; U_{2C} = \frac{Q}{2C} = \frac{U}{3}$$

После того как мы отсоединили конденсаторы от источника, их заряды не могут поменяться. Поэтому при опускании одного из них в жидкий диэлектрик, заряды конденсаторов не изменятся. А поскольку емкость конденсатора $2C$ не изменится, то не изменится и напряжение на нем. Емкость конденсатора C увеличится в ε раз: $C \to \varepsilon C$. Поэтому напряжение на нем уменьшится в ε раз. Следовательно, новое напряжение на батарее конденсаторов будет равно

$$U' = \frac{U_C}{\varepsilon} + U_{2C} = \frac{2U}{3\varepsilon} + \frac{U}{3} = \frac{(2+\varepsilon)}{3\varepsilon}U$$

Критерии оценки задачи

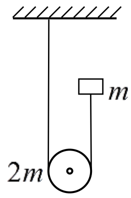
1. использовано, что при последовательном соединении конденсаторов их заряды одинаковы – 0,5 балла

2. использовано, что при последовательном соединении конденсаторов напряжения на них складываются – 0,5 балла

3. использованы правильные формулы для емкости конденсатора с диэлектриком – 0,5 балла

4. правильный ответ – 0,5 балла

Максимальная оценка за задачу – 2 балла



4. Подвижный блок массой $2m$, масса которого сосредоточена в его оси, удерживают с помощью куска веревки, один конец которой прикреплен к потолку, второй – к телу массой m. В некоторый момент тело отпускают. Найти его ускорение.

Решение. Если бы нить была не натянута, блок и тело падали бы с ускорением g. Но при натянутой нити ускорение тела должно быть в 2 раза больше ускорения блока. Поэтому сила натяжения должна тормозить блок и ускорять тело так, чтобы ускорение тела было вдвое больше ускорения блока. Пусть сила натяжения веревки T. Тогда на блок со стороны веревки действует сила $2T$ и сила тяжести $2mg$, на тело – сила натяжения T и сила тяжести mg. Поэтому законы Ньютона для блока и тела имеют вид

$$\begin{aligned} 2ma_{б} &= 2mg - 2T \\ ma_{m} &= mg + T \end{aligned} \qquad (3)$$

Очевидно, ускорения блока и тела связаны: когда тело проходит расстояние Δx, блок опускается на $\Delta x/2$, поскольку слева и справа от блока добавляется кусочек веревки длиной $\Delta x/2$. Поэтому в любой момент времени скорость тела вдвое больше скорости блока, а поэтому вдвое больше и ускорение тела $a_m = 2a_б$. В результате уравнения (3) дают

$$\begin{aligned} 2ma_{б} &= 2mg - 2T \\ 2ma_{б} &= mg + T \end{aligned}$$

Умножая второе уравнение на 2 и складывая, находим ускорение блока, а затем и ускорение тела

$$a_б = \frac{2g}{3}, \qquad a_m = \frac{4g}{3}$$

То обстоятельство, что ускорение тела оказалось больше ускорения свободного падения, есть следствие натянутости нити: нить тормозит блок, но разгоняет тело так, чтобы обеспечить двукратную разницу в их ускорениях.

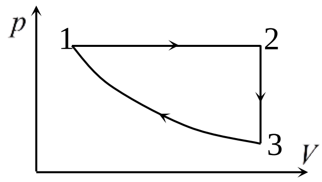
В заключение отметим, что если бы нить первоначально не была натянута, блок и тело падали бы с ускорением g, и через некоторое время блок натянул бы нить, и тела стали бы двигаться так, как описано в задаче.

Критерии оценки задачи

1. понято, что при падении нить будет натянутой – 0,5 балла
2. написаны правильные уравнения динамики для блока и тела – 0,5 балла
3. использованы правильные условия связи – 0,5 балла
4. правильный ответ – 0,5 балла

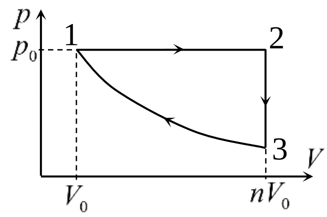
Максимальная оценка за задачу – 2 балла

5. С одноатомным идеальным газом проводят циклический процесс, состоящий из изобары, изохоры и адиабаты (см. рисунок). Чему равен максимально возможный КПД такого процесса как теплового двигателя? В адиабатическом процессе давление газа и его объем связаны соотношением: $pV^{5/3} = const$.



Решение. Пусть состоянию 1 отвечают давление p_0 и объем V_0, а в течение цикла объем увеличивается в n раз. Найдем КПД цикла и исследуем, его изменение в зависимости от изменения этих параметров.

Поскольку процесс 3-1 – адиабатический, тело получает тепло на участке 1-2 (контакт с нагревателем), отдает – на участке 2-3 (контакт с холодильником). Применяя первый закон термодинамики к процессам 1-2 и 2-3, получим



$$Q_н = Q_{1-2} = \frac{5}{2} p_0 V_0 (n-1), \; Q_x = Q_{2-3} = \frac{3}{2}(p_0 - p_1) n V_0 \qquad (4)$$

где $Q_н$ и Q_x - количества теплоты, полученные газом в течение цикла, p_1 - давление в состоянии 3. Давление в состоянии 3 найдем, применяя к процессу 3-1 закон адиабаты, данный в указании к условию задачи

$$p_0 V_0^{5/3} = p_1 (nV_0)^{5/3} \qquad \Rightarrow \qquad p_1 = \frac{1}{n^{5/3}} p_0 \qquad (5)$$

В результате из (4), (5) имеем для КПД процесса 1-2-3-1:

$$\eta = 1 - \frac{Q_x}{Q_н} = 1 - \frac{3}{5} \frac{\left(n - \frac{1}{n^{2/3}}\right)}{(n-1)} \qquad (6)$$

Из формулы (6) заключаем, что КПД вообще не зависит от p_0 и V_0, а зависит только от того, во сколько раз увеличивается объем газа в течение цикла. Поэтому для нахождения максимального КПД цикла нужно исследовать КПД как функцию n. Очевидно, это функция монотонно возрастающая. Действительно, из неравенств

$$1 < \frac{\left(n - \frac{1}{n^{2/3}}\right)}{(n-1)} < \frac{n}{n-1}$$

И того факта, что при $n \to \infty$ величина $n/(n-1)$ стремится к единице, следует, что величина

$$\frac{\left(n - \frac{1}{n^{2/3}}\right)}{(n-1)}$$

стремится к единице сверху, а поскольку в формуле (6) она вычитается, то КПД процесса растет с ростом n. Поэтому КПД цикла будет максимальным при $n \to \infty$ и равным

$$\eta_{\max} = 0,4$$

Критерии оценки задачи

1. использованы правильные принципы нахождения КПД процесса – 0,5 балла

2. правильные вычисления полученной и отданной теплоты – 0,5 балла

3. понято, что максимальным КПД будет при бесконечном увеличении конечного объема – 0,5 балла

4. правильный ответ – 0,5 балла

Максимальная оценка за задачу – 2 балла