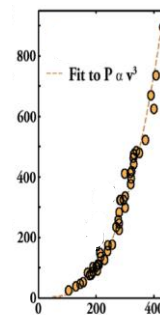


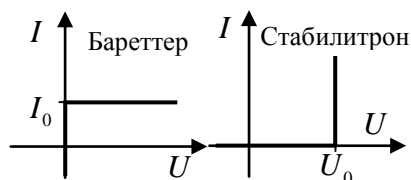
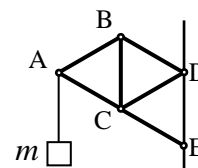
**Отборочный тур**  
**«Инженерной олимпиады школьников»**  
**2012-2013 учебного года**

1. На рисунке приведен график зависимости мощности автомобиля (ось ординат, кВт) от максимальной скорости, которую он способен развивать (ось абсцисс, км/ч). Этот график построен по данным, приводимым автопроизводителями относительно машин одного класса, имеющим близкие размеры (каждая точка соответствует какому-либо автомобилю). Наилучшим образом набор точек описывается кубической зависимостью ( $P \propto v^3$ ). Объясните, почему максимальная скорость машины зависит от корня третьей степени из мощности двигателя?

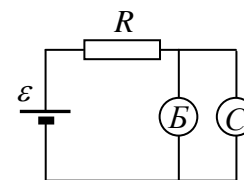


2. Во многих инженерных системах в качестве термомеханических датчиков (датчиков, испытывающих значительные деформации при изменении температуры) используются биметаллические пластины. Биметаллическая пластина состоит из двух пластинок, изготовленных из металлов с отличающимися коэффициентами линейного термического расширения и скрепленных между собой по всей поверхности контакта. Объясните, почему такая пластина будет изгибаться при нагревании или охлаждении, и оцените радиус изгиба и величину прогиба пластины при повышении ее температуры на величину  $\Delta T$ . Исходная длина пластины  $l$ , ее толщина  $\Delta h$  и коэффициенты линейного теплового расширения металлов, входящих в состав пластины,  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ . Считать, что толщина пластины много меньше радиуса изгиба. Оценить величину прогиба биметаллической пластины из стали ( $\alpha_1 = 1,2 \cdot 10^{-5}$  град $^{-1}$ ) и латуни ( $\alpha_2 = 1,9 \cdot 10^{-5}$  град $^{-1}$ ),  $l = 10$  см,  $\Delta h = 0,5$  мм,  $\Delta T = 100^\circ$  С. Сравните величину прогиба и величину удлинения пластинки.

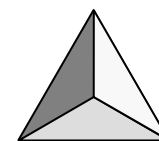
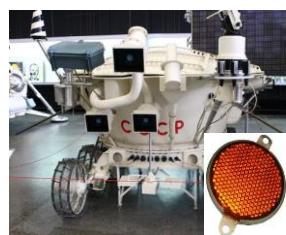
3. Тело массой  $m$  подвешено на нити, прикрепленной к точке А прикрепленного к стене кронштейна ABCDE, состоящего из шести невесомых стержней одинаковой длины, соединенных шарнирно (см. рисунок; длина отрезка DE на стене также равна длине стержня). Растянут или сжат стержень BC? Найти силу упругости стержня BC.



4. Вольтамперные характеристики бареттера и стабилизатора (приборов, служащих для стабилизации силы тока или напряжения соответственно) приведены на рисунках слева. Построить графики зависимости, напряжения и тока через стабилизатор и бареттер, а также тока через резистор от ЭДС источника.



5. Угловой отражатель представляет собой устройство в виде тетраэдра с тремя взаимно перпендикулярными отражающими внутренними поверхностями (см. рисунок). Группы таких отражателей размещают на устройствах, которые должны эффективно отражать падающий на них свет (такие отражатели используют, например, в локационных целях, на спасательных средствах, знаках дорожного движения и др.). Рассмотрите отражение произвольного луча света таким отражателем и объясните, каков принцип его работы. Блок угловых отражателей был установлен на советском автоматическом аппарате Луноход-1, работавшем на Луне (см. фото).



6. Оцените среднее давление пороховых газов в стволе ружья в момент выстрела. Считать, что пуля при вылете из ствола имеет скорость 400 м/с, и на разгон пули идет половина выделяющейся энергии. Значения всех необходимых для оценки величин выберите сами, исходя из своих знаний, опыта и здравого смысла.

## Ответы и решения

1. Для больших скоростей машины сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости с коэффициентом, который определяется геометрией машины. Поскольку речь идет о машинах одного класса, имеющих близкие размеры, можно ожидать, что для всех машин коэффициенты пропорциональности близки. Поэтому  $F_{\text{сопр}} = \alpha v^2$ , а мощность есть  $N = Fv \propto \alpha v^3$ .

2. Из-за разных коэффициентов теплового расширения пластины двух металлов по-разному удлиняются при нагревании (или сжимаются при охлаждении). А поскольку они спаяны по всей площади контакта, пластине выгоднее согнуться, чем растягивать один и сжимать другой металл. Причем при нагревании внутри изгиба будет пластинка из того металла, который меньше расширяется при нагревании.

Радиус изгиба можно найти из следующих соображений. Пусть биметаллическая пластина нагрелась на  $\Delta T$ . Тогда пластинки, из которых она состоит, удлинятся на следующие величины

$$\Delta l_1 = \alpha_1 \Delta T l \text{ и } \Delta l_2 = \alpha_2 \Delta T l$$

где  $l_0$  - первоначальная длина пластинок. Следовательно, для угла на который опирается пластина после изгиба, можно записать (с учетом малой толщины пластины)

$$\varphi = \frac{l + \Delta l_1}{R} = \frac{l + \Delta l_2}{R + \Delta h}$$

Отсюда, пренебрегая произведением двух малых величин, находим

$$R = \frac{l \Delta h}{\Delta l_2 - \Delta l_1} = \frac{\Delta h}{(\alpha_2 - \alpha_1) \Delta T}$$

Величину прогиба пластины (величина  $\Delta x$  на рисунке) можно найти как

$$\Delta x = R - R \cos(\varphi/2) \quad (*)$$

Если угол  $\varphi$  много меньше 1 радиана (для реальных пластин это условие выполнено), то

$$\cos(\varphi/2) \approx 1 - \varphi^2/8$$

(это равенство можно получить из основного тригонометрического тождества и первого замечательного предела  $\sin \varphi \approx \varphi$ ), то формулу (\*) можно привести к виду

$$\Delta x = \frac{l^2}{8R} = \frac{l^2 (\alpha_2 - \alpha_1) \Delta T}{8 \Delta h}$$

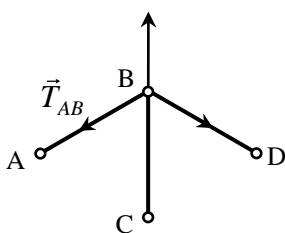
Подставляя в эту формулу данные в условии числа, найдем

$$\Delta x \approx 2 \text{ мм}$$

Величина удлинения пластины составит  $\alpha l \Delta T \approx 2 \cdot 10^{-1}$  мм, т.е. на порядок меньше.

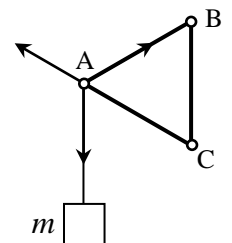
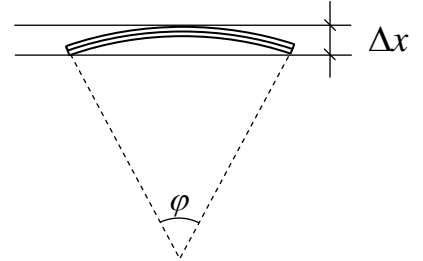
3. Если удалить стержень BC, то, очевидно, точки B и C начнут сближаться, поскольку треугольник CDE останется на месте, а ромб CABD будет «складываться». Поэтому стержень BC сжат. Аналогично заключаем, что стержень AB растянут, AC – сжат.

Найдем силу натяжения стержня BC. Во-первых, заметим, что воздействие шарнира на стержня или стержня на шарнир может осуществляться только вдоль стержня (по определению шарнира: предполагается, что шарнир не может оказать



никакого сопротивления вращению стержня).

Сначала рассмотрим шарнир A. Поскольку стержень AC сжат, а AB растянут, на шарнир A действуют такие силы – сила натяжения нити, равная силе тяжести груза и силы натяжения стержней AB и AC. Чтобы шарнир был в равновесии, сумма этих сил должна быть равна нулю. А поскольку углы между этими силами равны  $120^\circ$ , то их сумма равна нулю только в том случае, когда равны их величины. Поэтому  $T_{AB} = mg$ ,



$$T_{AC} = mg.$$

Рассмотрим теперь шарнир В. На него действуют три силы, сумма которых равна нулю, которые направлены под углами  $120^\circ$  друг к другу и одна из которых равна  $T_{AB} = mg$ . Поэтому и две остальные силы  $T_{BC}$  и  $T_{BD}$  равны друг другу и силе  $T_{AB}$ . Потому

$$T_{BC} = mg$$

4. Рассмотрим сначала случай малых значений ЭДС источника.

1. Если  $\varepsilon \leq I_0 R$ , ток в цепи не может быть больше, чем  $I_0$ , и, следовательно, напряжение на батарее (и стабилитроне) равно нулю. Поэтому ток через стабилитрон равен нулю, ток через батарею равен току через резистор:

$$(1) \text{ при } \varepsilon \leq I_0 R \quad U_{C,B} = 0, I_C = 0, I_{B,R} = \frac{\varepsilon}{R}$$

2. Ток через батарею не может превосходить  $I_0$ , а при напряжении на стабилитроне, меньшем  $U_0$ , через него течет нулевой ток. Поэтому при  $I_0 R \leq \varepsilon \leq I_0 R + U_0$ , ток через резистор будет равен нулю, ток через батарею будет равен  $I_0$ , ток через стабилитрон будет равен нулю, напряжение на стабилитроне и батарее будет равно  $\varepsilon - I_0 R$ .

$$(2) \text{ при } I_0 R \leq \varepsilon \leq I_0 R + U_0 \quad I_{B,R} = I_0, I_C = 0, U_{C,B} = \varepsilon - I_0 R$$

3. Если  $I_0 R + U_0 \leq \varepsilon$ , ток через батарею равен  $I_0$ , напряжение на стабилитроне и батарее равно  $U_0$ , ток через резистор равен  $I_R = \frac{\varepsilon - U_0}{R}$ , ток через стабилитрон равен разности тока через резистор и тока через батарею:

$$(3) I_0 R + U_0 \leq \varepsilon, \quad I_B = I_0, I_C = \frac{\varepsilon - U_0}{R} - I_0, U_{C,B} = U_0$$

Графики зависимости напряжения и тока через стабилитрон и батарею, а также тока через резистор от ЭДС источника ((1)-(3)) приведены на рисунке.

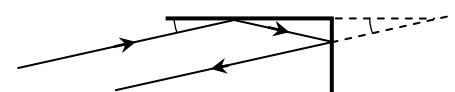
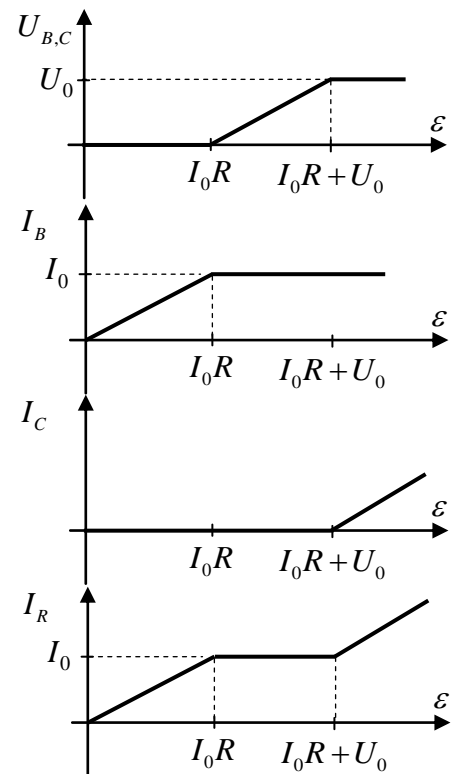
5. Докажем, что как бы ни падал луч на отражатель, после отражения он будет распространяться точно в обратном направлении.

Рассмотрим сначала случай, когда падающий луч параллелен одной из плоскостей отражателя. Тогда этот луч будет отражаться только от двух его граней, и отраженный луч будет лежать в плоскости, перпендикулярной этим граням (в этом случае задача, фактически, является плоской). Строя ход луча по правилам отражения (угол падения равен углу отражения), убеждаемся, что отраженный луч будет распространяться в направлении, обратном падающему (см. рисунок; параллельность падающего и отраженного лучей следует, например, из равенства углов, отмеченных на рисунке дугами).

Для доказательства сделанного выше утверждения в общем случае заметим, что для проекции падающего и отраженного луча на любую плоскость также будет справедливо утверждение – угол падения равен углу отражения. Поэтому падающий и отраженные лучи можно спроецировать на плоскости, параллельные граням отражателя, для проекций справедливо сделанное выше построение, откуда и следует сделанное утверждение.

На Луноходе блок уголкового отражателя размещался с целью точного определения расстояния от Земли до Луны. Лазерный луч (практически не имеющий расходимости) направлялся на отражатель и в той же точки на Земле регистрировался отраженный луч. По времени задержки можно было определить расстояние от точки, из которой направлялся луч, до Лунохода с высокой точностью и сравнить его со значениями расстояния до Луны, полученными другими методами.

Была и еще одна цель размещения отражателей на Луноходе - политическая. После американских экспедиций на Луну возник и активно муссировался в прессе слух, что на Луне американ-



ские астронавты якобы не были, а показанные по телевидению кадры высадки на Луну сняты на Земле. Так вот размещение углового отражателя на Луноходе позволяло любому человеку на Земле (обладающему минимальным набором лабораторного оборудования) проверить факт нахождения отражателя на Луне. По данным Центра управления полетами за время работы Лунохода на Луне было зарегистрировано более 50 попыток посылки лазерного луча на отражатель (кроме тех, что были сделаны для лазерного зондирования Луны советскими астрономами).

**6.** Работа пороховых газов идет на разгон пули. Поэтому

$$\frac{mv^2}{2} \approx 0,5pSl$$

где  $m \approx 10$  г – масса пули,  $S \approx 1$  см<sup>2</sup> – площадь сечения ствола ружья,  $l \approx 0,5$  м – длина ствола,  $p$  – среднее давление, 0,5 - доля работы, идущая на разгон пули. Отсюда получаем

$$p \approx \frac{mv^2}{Sl}$$

Используем:  $m = 20$  г,  $v = 400$  м/с,  $S = 2$  см<sup>2</sup>,  $l = 0,7$  м. Отсюда

$$p \approx \frac{mv^2}{Sl} \approx 3 \cdot 10^7 \text{ Па} \approx 300 \text{ атм}$$