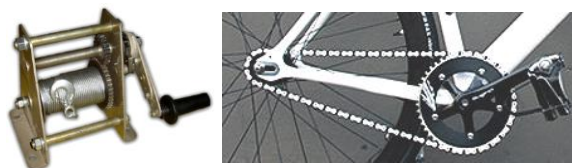
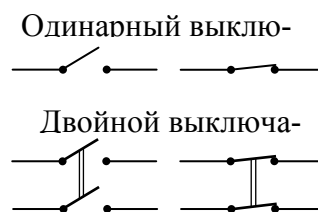


Решения
Задач очного отборочного тура
Инженерной олимпиады школьников на площадках городов расположения АЭС,
9-10 класс, 2016-2017 учебный год

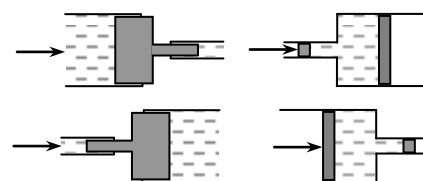
1. Лебедка и велосипед используют зубчатую передачу, но у лебедки усилие прилагается к малому зубчатому колесу, а у велосипеда - к большому. Объясните, чем вызвано такое различие.



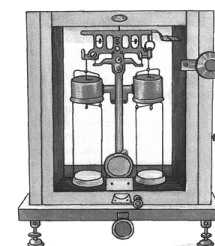
2. Имеется три лампочки, источник тока, провода, выключатели. Предложите простейшую электрическую цепь, в которой соединение этих трех лампочек с источником можно было бы менять с последовательного на параллельное с помощью только одного выключателя, в качестве которого разрешается использовать либо одинарный, либо двойной выключатель (см. рисунок; одинарный выключатель замыкает или размыкает один провод, двойной – одновременно два провода).



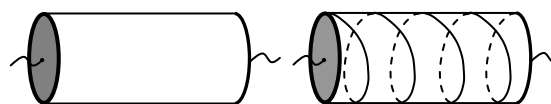
3. В некоторых технических приспособлениях используют устройства, показанные на правом и левом рисунках (на левых верхнем и нижнем рисунках поршень переменного сечения разделяет две жидкости, на правых верхнем и нижнем – жидкость в трубе переменного сечения занимает пространство между двумя поршнями разной площади). Одно из приведенных устройств можно назвать «мультипликатором давления», другое – «мультипликатором силы». Какое – как? Объясните, почему. В каких приспособлениях и как можно использовать «мультипликаторы» давления и силы? Найти увеличение силы или давления, если радиус тонкой трубы равен r , а толстой - $10r$.



4. При работе на аналитических гирных весах для химических анализов, когда требуется высокая точность, используют метод двойного взвешивания (метод Гаусса), который позволяет исключить ошибки, связанные с неравноплечностью весов. Сначала измеряемый объект взвешивают на одной чаше весов, а затем на второй. Из-за небольших неточностей в размерах плеч весов их показания (масса гирь, уравновешивающих объект) в этих двух случаях окажутся неодинаковыми. Пусть при взвешивании объекта на одной чаше показания весов m_1 , на второй - m_2 . Тогда массу взвешиваемого объекта принимают равной среднему арифметическому этих значений - $(m_1 + m_2)/2$. Почему?



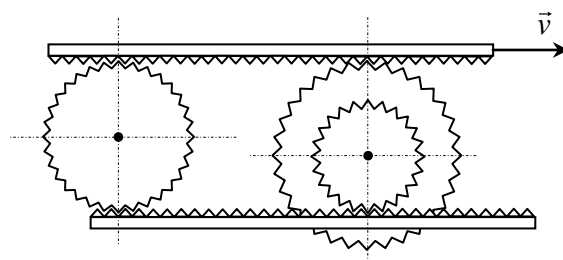
5. Боковую поверхность диэлектрического цилиндра покрыли металлической фольгой. Если цилиндр включить в электрическую цепь (левый рисунок), его сопротивление будет равно $R = 10$ Ом. Затем на поверхности цилиндры делают надрез в форме винтовой линии, огибающей цилиндр ровно $N = 5$ раз (правый рисунок). Найти новое сопротивление



Найти новое сопротивление

цилиндра. В цепь цилиндр включен между своими основаниями, сопротивление которых мало. Длина цилиндра - $L = 20$ см, радиус основания - $r = 3$ см.

6. Два зубчатых колеса помещены между горизонтальными зубчатыми рейками. Одно колесо одиночное, имеет радиус R , второе ступенчатое, образовано двумя концентрическими колесами радиусов $3R/4$ и $5R/4$, причем второе колесо зажато между рейками большим и малым колесами (см. рисунок). Верхняя рейка движется вправо со скоростью v . Сближаются или удаляются друг от друга колеса? Найти скорость центра правого колеса относительно центра левого.



Решения

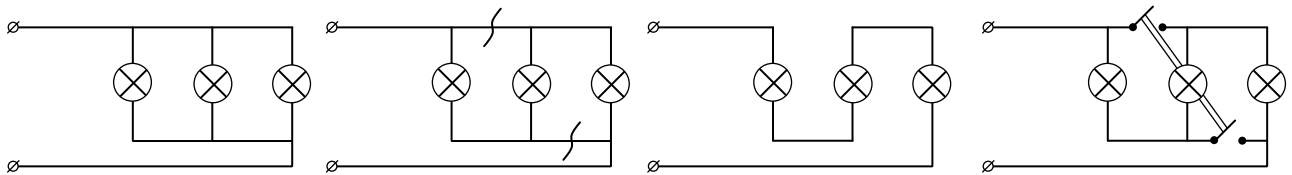
1. Главное в лебедке – сила, которую она может обеспечить, в велосипеде – скорость. Именно с этим и связано различие лебедки и велосипеда.

Действительно, если колесо, к которому прикладывается усилие, совершает полный оборот, это приводит к вытягиванию троса или цепи на величину длины окружности зубчатого колеса. Поэтому если колесо маленькое (как у лебедки), длина троса уменьшится на малую величину, что обеспечивает малую скорость вытягивания троса. При большом диаметре зубчатого колеса (как у велосипеда), цепь прокручивается на большую величину, обеспечивая большую скорость вращения ведомого колеса (особенно при условии малого размера шестеренки на ведомом колесе). Поэтому скорости вытягивания троса или цепи пропорциональны радиусам зубчатых колес.

Однако усилия, которые необходимо затратить для вращения зубчатых колес обратно пропорциональны радиусам. Действительно, момент внешней силы, которую необходимо приложить к колесу для его вращения, равен моменту сил сопротивления, а последний пропорционален плечу, т.е. радиусу колеса.

Поэтому, используя малое колесо, мы выигрываем в силе, но проигрываем в скорости. И наоборот. Используя большое колесо, мы выигрываем в скорости, но проигрываем в силе.

2. Основная идея такой электрической цепи может заключаться в следующем. Пусть мы соединяем три лампочки с источником так, как это показано на левом рисунке.



Но если сделать разрывы проводов так, как показано на среднем левом рисунке, то цепь сведется к цепи, показанной на среднем правом рисунке – а это последовательное соединение ламп. Ясно, что такой разрыв двух проводов одновременно можно сделать с помощью двойного выключателя (правый рисунок), причем несмотря на то, что на рисунке два выключателя двойного переключателя находятся далеко друг от друга, с помощью деформации проводов технически осуществить такое соединение возможно.

3. В левом верхнем устройстве условие равновесия поршня переменного сечения дает

$$p_1 S_1 = p_2 S_2$$

где p_1 и p_2 - давления жидкости в правом и левом отсеках, S_1 и S_2 - площади сечения правого и левого отсеков. Отсюда находим

$$p_2 = \frac{S_1}{S_2} p_1 \quad \Rightarrow \quad p_2 > p_1, \text{ если } S_1 > S_2.$$

Таким образом, левое верхнее устройство представляет собой мультипликатор (увеличитель или множитель давления). Используется в системах, где с помощью жидкости передается давление и нужно его увеличивать (например, в тормозной системе автомобиля). Если отношение радиусов

труб равно 10, то увеличение давления равно 100. По этим же причинам левое нижнее устройство следует назвать редуктором (уменьшителем) давления.

Правые устройства являются мультипликатором и редуктором силы. Поскольку давление жидкости около правого и левого поршней одинаково, то

$$\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2}$$

где F_1 и F_2 - силы, действующие со стороны воды на правый и левый поршни (и поршней на воду), S_1 и S_2 - площади сечения правого и левого отсеков. Отсюда находим

$$F_2 = \frac{S_2}{S_1} F_1 \quad \Rightarrow \quad F_2 > F_1, \text{ если } S_2 > S_1.$$

Поэтому правый верхний прибор следует назвать умножителем силы. Такого рода конструкции используются в гидравлических домкратах. Если отношение радиусов труб равно 10, то увеличение силы равно 100. По этим же причинам правое нижнее устройство следует назвать редуктором (уменьшителем) силы (в 100 раз при отношении радиусов труб – 10).

4. Пусть одно плечо весов - l_1 , второе - l_2 , но весы уравновешены. Тогда при взвешивании объекта на одной чаше весов имеем

$$m_1 l_1 = m l_2,$$

а на другой

$$m l_1 = m_2 l_2.$$

где m - масса взвешиваемого объекта, m_1 и m_2 - массы гирь, уравновешивающих объект на одной и на другой чашах весов. Деля эти уравнения друг на друга и выражая из получившегося уравнения m , получим

$$m = \sqrt{m_1 m_2}. \quad (*)$$

С другой стороны, поскольку неравноплечность хороших весов невелика, разность масс m_1 и m_2 много меньше самих этих масс и, следовательно, среднее геометрическое близко к среднему арифметическому

$$\sqrt{m_1 m_2} \approx \frac{m_1 + m_2}{2} \quad (**)$$

Причем погрешность, которую мы совершаем, заменяя среднее геометрическое на среднее арифметическое, квадратична по малой разности $m_1 - m_2$

$$\frac{\Delta m}{m} = \frac{m_1 + m_2 - 2\sqrt{m_1 m_2}}{m_1 + m_2} = \frac{(\sqrt{m_1} - \sqrt{m_2})^2}{m_1 + m_2} \approx \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right)^2$$

что и оправдывает переход от среднего геометрического к среднему арифметическому.

5. Пусть радиус цилиндра r , длина L . Если разрезать фольгу по образующей цилиндра и развернуть, то полученный прямоугольник из фольги с основаниями $2\pi r$ и высотой L , оказывается включенным в цепь между основаниями. Поэтому, если сопротивление единицы длины поперечного сечения фольги σ , то сопротивление цилиндра в первом случае равно

$$R = \frac{\sigma L}{2\pi r}$$

Если разрезать фольгу по винтовой линии и развернуть (второй случай), то она будет представлять собой параллелограмм со сторонами $2\pi r$ и $2\pi rN$. Чтобы найти сопротивление такого параллелограмма, включенного между своими основаниями, заметим, что его можно считать состоящим из параллельно соединенных проводников длиной $2\pi rN$ каждый с суммарной шириной, равной высоте параллелограмма - L/N . Поэтому новое сопротивление фольги есть

$$R_1 = \frac{\sigma 2\pi rN}{(L/N)} = \left(\frac{2\pi rN}{L}\right)^2 R = 222 \text{ Ом}$$

6. Движение колес представляет собой вращение и поступательное движение, а скорости различных точек колес складываются из скоростей этих двух движений. Используя эти соображения найдем скорости движения колес. Пусть левое колесо движется направо со скоростью v_1 и вращается по часовой стрелке с угловой скоростью ω_1 (если какая-то из этих величин, найденная из нижеследующей системы уравнений, окажется отрицательной, направление движения или вращения колеса будет противоположным). Поскольку в системе отсчета, связанной с центром колеса, оно только вращается, скорость верхней точки колеса равна $v_1 + \omega_1 R$, нижней - $v_1 - \omega_1 R$. А так как скорости верхней и нижней точек левого колеса совпадают со скоростями верхней и нижней реек, для v_1 и ω_1 имеем:

$$\begin{aligned} v_1 + \omega_1 \frac{5}{4} R &= v \\ v_1 - \omega_1 \frac{5}{4} R &= 0 \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$v_1 = \frac{1}{2} v$$

Пусть правое колесо также движется направо со скоростью v_2 и вращается по часовой стрелке с угловой скоростью ω_2 . Тогда

$$\begin{aligned} v_2 + \omega_2 \frac{5}{4} R &= v \\ v_2 - \omega_2 \frac{3}{4} R &= 0 \end{aligned}$$

Отсюда

$$v_2 = \frac{3}{8}v$$

т.е. скорость правого колеса меньше скорости левого. Поэтому колеса сближаются, и скорость центра правого колеса относительно центра левого равна

$$u = v_1 - v_2 = \frac{1}{8}v$$