Задания заключительного тура

Всероссийского конкурса научных работ школьников «Юниор» 2014-2015 учебного года

секция математики, 10 класс

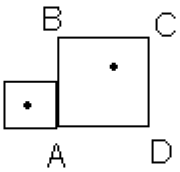
1. Доказать, что дробь $\frac{a^4+3a^2+1}{a^3+a}$ несократима при любых целых a.

2. Найти все целые числа $x>5$ и $y>7$ удовлетворяющие уравнению

$$(x-y)^2+5(x-y)-2x=4 .$$

3. При каких значениях a уравнение $x^4+(a-11)x^2-2a^2-4a+30=0$ имеет четыре действительных корня, являющиеся последовательными членами арифметической прогрессии?

4. К квадратной комнате $ABCD$ размером 12×12 примыкает квадратный коридор размером 4×4 так, как это изображено на рис. В центре коридора сидит мышь, которая может двигаться только по прямой. В комнате находится кошка. Задача мыши добежать до стены CD, при этом не попасть в лапы кошки. Мышка обречена, если во время движения расстояние между неподвижной кошкой и бегущей мышкой окажется меньше R. При каком наименьшем значении R кошка может расположиться в комнате так, что мышка никогда не сможет добежать до стены?



Ответы и решения

1. Дробь $\frac{a^4+3a^2+1}{a(a^2+1)}$ сократима на простое число k, если на k делится число a, либо число a^2+1. Если число a делится на k, то знаменатель делится на k,а числитель при делении на k дает в остатке 1, поэтому сокращение дроби на k невозможно.

Разделим числитель дроби на a^2+1 с остатком: $a^4+3a^2+1=\left(a^2+1\right)\left(a^2+2\right)-1$. Тогда любой простой делитель числа a^2+1 не делит числитель, поэтому дробь не сократима. Если число k составное, то дробь должна быть сократима на любой его простой делитель, что невозможно.

2. Обозначим через $t=x-y-$ целое число. Тогда $x=\frac{t^2+5t-4}{2}=\frac{t(t+5)}{2}-2>5$ и $y=\frac{t^2+3t-4}{2}=\frac{t(t+3)}{2}-2>7$ целые числа при любых $t\in Z$, поскольку числа t и $t+5$ (а также t и $t+3$) различные по четности.

Решение неравенства $x>5 \to t^2+5t-14>0 \to t\in(-\infty;-7)\cup(2;+\infty)$ в совокупности с решением неравенства $y>7 \to t^2+3t-18>0 \to t\in(-\infty;-6)\cup(3;+\infty)$ и пересечение этих множеств дадут допустимые значения целого параметра t : $t\in(-\infty;-7)\cup(3;+\infty)$

3. $D=(a-11)^2-4(-2a^2-4a+30)=(3a-1)^2 \to x^2=6-2a,\ x^2=a+5$

$\begin{cases} 6-2a>0 \\ a+5>0 \end{cases} \to a\in(-5;3)$ – условие четырех корней.

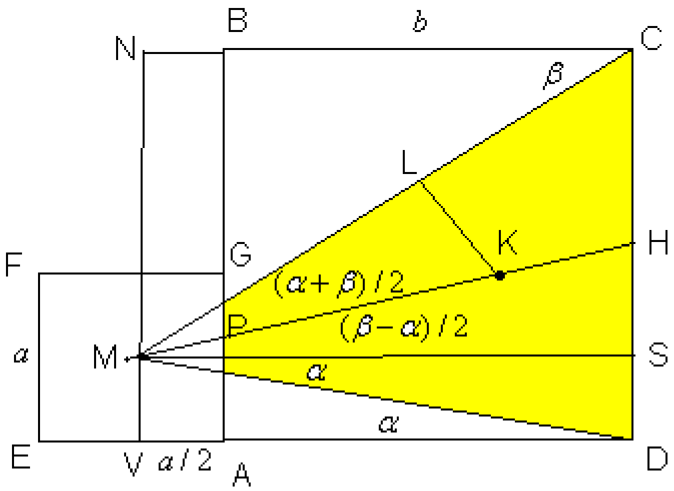
Случай 1. $\sqrt{6-2a}>\sqrt{a+5} \to a\in(-5;1/3)$

$2\sqrt{a+5}=\dfrac{2\sqrt{6-2a}}{3} \to a=-\dfrac{39}{11}\in(-5;1/3)$ - условие прогрессии

Случай 2. $\sqrt{a+5}>\sqrt{6-2a} \to a\in(1/3;3)$

$2\sqrt{6-2a}=\dfrac{2\sqrt{a+5}}{3} \to$ условие прогрессии, $\to\ a=\dfrac{49}{19}\in(1/3;3)$

4.



В условии задачи, числа a и b таковы, что лучи MC и MD пересекают отрезок AG . Любой луч внутри угла CMD - возможная траектория движения мыши. На рис. MH - биссектриса угла CMD, точка K - положение кошки на биссектрисе и центр окружности радиуса R, M - положение мышки. Если $LK=R$, то кошка перекрывает все возможные по условию траектории мышки. Если точка K не лежит на биссектрисе, но находится на том же расстоянии от точки M , то значение перекрывающего R возрастет. Минимальное значение R , при условии того, что кошка находится в комнате, соответствует точке $K=P$.

Вычисление $R_{\min}$:

$$tg\alpha=\frac{a}{2b+a},\quad tg\beta=\frac{2b-a}{2b+a},\ MP=\frac{a}{2\cos\frac{\beta-\alpha}{2}},\ MH=\frac{2b+a}{2\cos\frac{\beta-\alpha}{2}}$$

$$MK=\frac{R}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

Условие перекрытия пути для мышки: $MP\le MK\to\frac{a\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{2\cos\frac{\beta-\alpha}{2}}\le R\to R_{\min}=\frac{a\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{2\cos\frac{\beta-\alpha}{2}}$

Вычисление тригонометрических функций $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$ и $\cos\frac{\beta-\alpha}{2}$ по условиям задачи:

$$\cos\alpha=\frac{2b+a}{\sqrt{2}\sqrt{(a+b)^2+b^2}};\quad \sin\alpha=\frac{a}{\sqrt{2}\sqrt{(a+b)^2+b^2}}$$

$$\cos\beta=\frac{2b+a}{\sqrt{2}\sqrt{4b^2+a^2}};\quad \sin\beta=\frac{2b-a}{\sqrt{2}\sqrt{4b^2+a^2}}$$

$$\cos(\beta-\alpha)=\frac{b(2b+3a)}{\sqrt{4b^2+a^2}\sqrt{(a+b)^2+b^2}};\ \cos(\beta+\alpha)=\frac{a^2+ab+2b^2}{\sqrt{4b^2+a^2}\sqrt{(a+b)^2+b^2}}$$

Вычисление числа $k=\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\beta-\alpha}{2}}$

$$k^2=\frac{1-\cos(\alpha+\beta)}{1+\cos(\beta-\alpha)}=\frac{\sqrt{4b^2+a^2}\sqrt{(a+b)^2+b^2}-a^2-ab-2b^2}{\sqrt{4b^2+a^2}\sqrt{(a+b)^2+b^2}+b(2b+3a)}\to R_{\min}=\frac{ak}{2}$$

В задании

$$a=4,\ b=12\to k^2=\frac{31-5\sqrt{37}}{4}\to k=\frac{\sqrt{31-5\sqrt{37}}}{2}\approx 0,383$$

$$R_{\min}=2k=\sqrt{31-5\sqrt{37}}\approx 0,76$$